Řešení úloh okresního kola 62. ročníku Fyzikální olympiády ve školním roce 2020/2021

Kategorie E

Autoři úloh: M. Benediková (1, FO SR), V. Koudelková (2), L. Richterek (4) a J. Thomas (3)

FO62E2-1: Výlet na Kašperk

a) Protože Milan jde 2× rychleji než Tomáš s Evou, bude jeho doba chůze t_2 poloviční a Tomáš s Evou půjdou 2× déle než Milan, tj. bude platit $t_1 = 2t_2$. Zároveň platí, že Tomáš s Evou dorazí k hradu se zpožděním

$$\Delta t = t_1 - t_2 = 2t_2 - t_2 = t_2 = 10{:}30 - 10{:}00 = 30\,\mathrm{min} = 0{,}50\,\mathrm{h}.$$

Milan ušel trasu za čas $t_2 = 0{,}50\,\mathrm{h}$ (tj. 30 min), Tomáš s Evou za $t_1 = 2t_2 = 1{,}0\,\mathrm{h}$.

3 body

Poznámka: Úlohu lze řešit i rovnicí. Označíme-li dobu chůze Tomáše s Evou t_1, Milana o půl hodiny méně, tj. v hodinách $t_2 = t_1 - 0{,}50$, pak při zadaných rychlostech můžeme pro vzdálenost z náměstí je hradu psát

$$3t_1 = 6\,(t_1 - 0{,}50)\,, \qquad \Longrightarrow \qquad t_1 = 1\,\mathrm{h}, \qquad t_2 = t_1 - 0{,}50\,\mathrm{h} = 0{,}50\,\mathrm{h}.$$

b) Vzdálenost, kterou ušli, získáme buď z chůze Milana

$$d = v_2 t_2 = 6{,}0\,\mathrm{km/h} \cdot 0{,}50\,\mathrm{h} = 3{,}0\,\mathrm{km}$$

nebo Tomáše s Evou

$$d = v_1 t_1 = 6{,}0\,\mathrm{km/h} \cdot 0{,}50\,\mathrm{h} = 3{,}0\,\mathrm{km}.$$

2 body

Poznámka: Úlohu lze samozřejmě řešit i pomocí rovnice

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{d}{v_1} - \frac{d}{v_2} = \frac{d\,(v_2 - v_1)}{v_1 v_2},$$

odkud vyjádříme

$$d = \Delta t \frac{v_1 v_2}{v_2 - v_2} = 0{,}50\,\mathrm{h} \cdot \frac{3\,\mathrm{km/h} \cdot 6\,\mathrm{km/h}}{6\,\mathrm{km/h} - 3\,\mathrm{km/h}} = 3{,}0\,\mathrm{km}.$$

c) Z Kašperských Hor vyšli o čas $t_1 = 1{,}0\,\mathrm{h}$ dříve, než na hrad dorazili Tomáš s Evou, tj. v čase $t = 10{:}30 - 1\,\mathrm{h} = 9{:}30$. Můžeme také vycházet z údajů Milana, potom $t = 10{:}00 - 30\,\mathrm{min} = 9{:}30$.

2 body

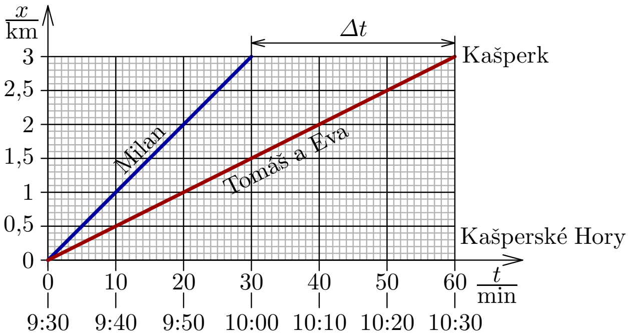
d) Příklad grafu je na obr. 1. Pro chůzi Milana odpovídá graf závislosti $\{x\} = 6\{t\}$ pro hodnoty vzdálenosti x v km a času t v hodinách (případně $\{x\} = 6\{t\}/60 = \{t\}/10$) pro hodnoty času v minutách, pro Tomáše s Evou pak závislosti $\{x\} = 3\{t\}$ pro čas t v hodinách (případně $\{x\} = 3\{t\}/60 = \{t\}/20$ pro hodnoty času v minutách).

Poznámka: Vypsání funkční závislosti není po řešitelích požadováno, stačí správně sestrojený graf. Tabulka není povinná.

3 body

FO62E2-2: Během tuhé zimy

a) Hustota sněhu je pětinová oproti hustotě vody ($\varrho_\mathrm{s} = 200\,\mathrm{kg/m^3} = \varrho/5 = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}/5$), takže Franta potřebuje 5× větší objem sněhu než vody;



Tabulka hodnot		
	Milan	Tomáš+Eva
t/min	x/km	x/km
0	0,0	0,0
10	1,0	0,5
20	2,0	1,0
30	3,0	1,5
40		2,0
50		2,5
60		3,0

Obr. 1: K řešení úlohy FO62E2-1

označíme-li objem vody $V = 0{,}50\,\text{litru} = 0{,}000\,5\,\mathrm{m^3}$, pro objem sněhu vychází $V_\mathrm{s} = 5V = 5 \cdot 0{,}50\,\text{litru} = 2{,}5\,\text{litru}$. **2 body**

Poznámka: Lze využít i skutečnost, že hmotnost vody musí být stejná jako hmotnost sněhu, jehož roztáním vznikla, platí proto

$$m = \varrho V = \varrho_\mathrm{s} V_\mathrm{s}; \quad V_\mathrm{s} = V\frac{\varrho}{\varrho_\mathrm{s}} = 0{,}50\,\mathrm{l}\frac{1\,000\,\mathrm{kg/m^3}}{200\,\mathrm{kg/m^3}} = 2{,}5\,\mathrm{l}.$$

b) Celkové potřebné teplo můžeme rozdělit na tři části. Ve všech případech pracujeme s hmotností sněhu a vzniklé vody $m = \varrho V = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}000\,5\,\mathrm{m^3} = 0{,}5\,\mathrm{kg}$. Teplo potřebné na ohřátí sněhu z venkovní teploty $t_1 = -5\,°\mathrm{C}$ na teplotu tání $t_0 = 0\,°\mathrm{C}$

$$Q_1 = mc_\mathrm{l}\,(t_0 - t_1) = 0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 2{,}1\,\mathrm{kJ/(kg \cdot °C)} \cdot [0 - (-5\,°\mathrm{C})] = \\ = 0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 2{,}1\,\mathrm{kJ/(kg \cdot °C)} \cdot 5\,°\mathrm{C} = 5{,}25\,\mathrm{kJ}.$$

Dále potřebujeme teplo na roztátí sněhu

$$Q_2 = ml_\mathrm{t} = 0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 334\,\mathrm{kJ/kg} = 167\,\mathrm{kJ}.$$

Konečně k ohřátí vody z teploty tání $t_0 = 0\,°\mathrm{C}$ na teplotu varu $t_2 = 100\,°\mathrm{C}$ je potřeba teplo

$$Q_3 = mc_\mathrm{v}\,(t_2 - t_0) = 0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 4{,}2\,\mathrm{kJ/(kg \cdot °C)} \cdot (100\,°\mathrm{C} - 0\,°\mathrm{C}) = 210\,\mathrm{kJ}.$$

Celkem je potřeba

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 5{,}25\,\mathrm{kJ} + 167\,\mathrm{kJ} + 210\,\mathrm{kJ} = 382{,}25\,\mathrm{kJ} \doteq 380\,\mathrm{kJ}.$$ **4 body**

c) Pro čas τ a účinnost $\eta = 40\,\% = 0{,}4$ platí $Q = \eta P \tau$, odkud vyjádříme

$$\tau = \frac{Q}{\eta P} = \frac{382\,250\,\mathrm{J}}{0{,}4 \cdot 1\,300\,\mathrm{W}} = 735{,}1\,\mathrm{s} \doteq 740\,\mathrm{s} \doteq 12\,\mathrm{min}.$$ **2 body**

d) Jestliže je výhřevnost $H = 60\,\mathrm{MJ/kg}$, spálením 1 g získáme 1000× menší teplo, tj. $H = 60\,\mathrm{kJ/g}$. Pro hmotnost m_1 plynu při účinnosti η platí $Q = \eta m_1 H$, odkud

$$m_1 = \frac{Q}{\eta H} = \frac{382{,}25\,\mathrm{kJ}}{0{,}4 \cdot 60\,\mathrm{kJ/g}} \doteq 15{,}927\,\mathrm{g} \doteq 16\,\mathrm{g}.$$ **2 body**

FO62E2-3: Kostičky v krabicích

a) Vyjádřeme objem krabic $V = 2{,}0\,\mathrm{litry} = 2\,000\,\mathrm{cm}^3$, hmotnosti $m_1 = 5{,}2\,\mathrm{kg} = 5\,200\,\mathrm{g}$ a $m_2 = 6{,}8\,\mathrm{kg} = 6\,800\,\mathrm{g}$. Pro hustoty dostáváme

$$\varrho_1 = \frac{m_1}{V} = \frac{5\,200\,\mathrm{g}}{2\,000\,\mathrm{cm}^3} = 2{,}6\,\mathrm{g/cm}^3 = 2\,600\,\mathrm{kg/m}^3.$$

$$\varrho_2 = \frac{m_2}{V} = \frac{6\,800\,\mathrm{g}}{2\,000\,\mathrm{cm}^3} = 3{,}4\,\mathrm{g/cm}^3 = 3\,400\,\mathrm{kg/m}^3.$$

2 body

b) Změna hustoty krabice při výměně jedné kostičky bude

$$\Delta\varrho = \frac{m_\mathrm{b} - m_\mathrm{č}}{V} = \frac{150\,\mathrm{g} - 50\,\mathrm{g}}{2\,000\,\mathrm{cm}^3} = 0{,}050\,\mathrm{g/cm}^3.$$

3 body

Poznámka: Namísto výše uvedené úvahy lze dojít k výsledku přes hmotnosti krabic. Pokud vyměníme kostičky v první krabici, bude její hustota po záměně

$$\varrho_1' = \frac{m_1 + m_\mathrm{b} - m_\mathrm{č}}{V} = \frac{5\,200\,\mathrm{g} + 150\,\mathrm{g} - 50\,\mathrm{g}}{2\,000\,\mathrm{cm}^3} = 2{,}65\,\mathrm{g/cm}^3,$$

pro druhou dostaneme

$$\varrho_2' = \frac{m_2 + m_\mathrm{b} - m_\mathrm{č}}{V} = \frac{6\,800\,\mathrm{g} + 150\,\mathrm{g} - 50\,\mathrm{g}}{2\,000\,\mathrm{cm}^3} = 3{,}45\,\mathrm{g/cm}^3.$$

V obou případech platí

$$\Delta\varrho = \varrho_1' - \varrho_1 = \varrho_2' - \varrho_2 = 0{,}050\,\mathrm{g/cm}^3.$$

c) Označme počet červených a bílých kostiček v první krabici c_1, b_1, ve druhé c_2, b_2; zároveň podle zadání platí $c_1 = b_1 + 40$. Ze zadaných hmotností kostiček pak pro hmotnost první krabice platí

$$m_1 = c_1 m_\mathrm{č} + b_1 m_\mathrm{b} = (b_1 + 40) \cdot m_\mathrm{č} + b_1 m_\mathrm{b}.$$

Po dosazení číselných hodnot v gramech dostaneme rovnici

$$5\,200 = 50 \cdot (b_1 + 40) + 150 b_1 = 200 b_1 + 2\,000,$$

odkud vychází

$$b_1 = \frac{5\,200 - 2\,000}{200} = 16.$$

Bílých kostiček je 16, červených $c_1 = b_1 + 40 = 16 + 40 = 56$, celkem $c_1 + b_1 = 56 + 16 = 72$. Pro druhou krabici tak platí $c_2 + b_2 = 72$, tj. $c_2 = 72 - b_2$ a dostáváme

$$m_2 = c_2 m_\mathrm{č} + b_2 m_\mathrm{b} = (72 - b_2) \cdot m_\mathrm{č} + b_2 m_\mathrm{b}.$$

Po dosazení číselných hodnot v gramech dostaneme rovnici

$$6\,800 = 50 \cdot (72 - b_2) + 150 b_2 = 100 b_2 + 3\,600,$$

odkud vychází

$$b_2 = \frac{6\,800 - 3\,600}{100} = 32.$$

Bílých kostiček je 32, červených $c_2 = 72 - b_2 = 72 - 32 = 40$. **5 bodů**

FO62E2-4: Zapojení LED diody

a) Pokud diodu připojíme na malé napětí, nerozsvítí se vůbec, proto pro připojení k baterii s napětím $U_1 < U_\mathrm{D}$ svítit nebude ani v jednom zapojení. **1 bod**

Jestliže Tereza použije plochou baterii s $U_2 = 4{,}5\,\mathrm{V}$ a na diodě má být napětí $U_\mathrm{D} = 1{,}8\,\mathrm{V}$, na rezistoru bude napětí $U_\mathrm{R} = U_2 - U_\mathrm{D} = 4{,}5\,\mathrm{V} - 1{,}8\,\mathrm{V} = 2{,}7\,\mathrm{V}$ a poteče jím stejný proud jako diodou, tj. $I_\mathrm{R} = I_\mathrm{D} = 20\,\mathrm{mA} = 0{,}020\,\mathrm{A}$. Pro odpor rezistoru tak dostáváme

$$R_1 = \frac{U_\mathrm{R}}{I_\mathrm{R}} = \frac{2{,}7\,\mathrm{V}}{0{,}020\,\mathrm{A}} = 135\,\Omega.$$

Podobně pro baterii s napětím $U_3 = 9{,}0\,\mathrm{V}$ na rezistoru má být napětí $U_\mathrm{R} = U_3 - U_\mathrm{D} = 9{,}0\,\mathrm{V} - 1{,}8\,\mathrm{V} = 7{,}2\,\mathrm{V}$, pro odpor rezistoru tak dostáváme

$$R_1 = \frac{U_\mathrm{R}}{I_\mathrm{R}} = \frac{7{,}2\,\mathrm{V}}{0{,}020\,\mathrm{A}} = 360\,\Omega.$$

3 body

b) Při zapojení dvou diod za sebou má být na každé napětí $U_\mathrm{D} = 1{,}8\,\mathrm{V}$, na diodách celkem $2U_\mathrm{D} = 3{,}6\,\mathrm{V}$. Podobně jako v první části při zapojení s plochou baterií $U_2 = 4{,}5\,\mathrm{V}$ na rezistoru bude napětí $U_\mathrm{R} = U_2 - 2U_\mathrm{D} = 4{,}5\,\mathrm{V} - 2 \cdot 1{,}8\,\mathrm{V} = 0{,}90\,\mathrm{V}$ a poteče jím stejný proud jako diodami, tj. $I_\mathrm{R} = I_\mathrm{D} = 20\,\mathrm{mA} = 0{,}020\,\mathrm{A}$ a pro jeho odpor vychází

$$R_2 = \frac{U_\mathrm{R}}{I_\mathrm{R}} = \frac{0{,}9\,\mathrm{V}}{0{,}020\,\mathrm{A}} = 45\,\Omega.$$

Pro baterii s napětím $U_3 = 9{,}0\,\mathrm{V}$ pak na rezistoru má být napětí $U_\mathrm{R} = U_3 - 2U_\mathrm{D} = 9{,}0\,\mathrm{V} - 2 \cdot 1{,}8\,\mathrm{V} = 5{,}4\,\mathrm{V}$, pro odpor rezistoru tak dostáváme

$$R_2 = \frac{U_\mathrm{R}}{I_\mathrm{R}} = \frac{5{,}4\,\mathrm{V}}{0{,}020\,\mathrm{A}} = 270\,\Omega.$$

2 body

c) Nyní budou na rezistoru stejná napětí jako v části a), ale rezistorem poteče proud odpovídající součtu proudů oběma diodami, tj. $I_\mathrm{R} = 2I_\mathrm{D} = 0{,}040\,\mathrm{A}$. Pro odpor rezistoru pak dostáváme buď

$$R_3 = \frac{U_\mathrm{R}}{I_\mathrm{R}} = \frac{2{,}7\,\mathrm{V}}{0{,}040\,\mathrm{A}} = 67{,}5\,\Omega \doteq 68\,\Omega$$

pro baterii s napětím $U_2 = 4{,}5\,\mathrm{V}$ nebo

$$R_3 = \frac{U_\mathrm{R}}{I_\mathrm{R}} = \frac{7{,}2\,\mathrm{V}}{0{,}040\,\mathrm{A}} = 180\,\Omega$$

pro baterii s napětím $U_3 = 9{,}0\,\mathrm{V}$. **2 body**

d) V části a) teče rezistorem proud $I_\mathrm{D} = 0{,}020\,\mathrm{A}$, tepelný výkon uvolněný na rezistoru pak bude buď $P = R_1 I_\mathrm{D}^2$ (nebo také $P = U_\mathrm{R}^2/R_1$ či $P = U_\mathrm{R} I_\mathrm{D}$). Pro vypočítané hodnoty vychází

$$P = R_1 I_\mathrm{D}^2 = 135\,\Omega \cdot (0{,}020\,\mathrm{A})^2 = 0{,}054\,\mathrm{W}$$

a

$$P = R_1 I_\mathrm{D}^2 = 360\,\Omega \cdot (0{,}020\,\mathrm{A})^2 = 0{,}144\,\mathrm{W} \doteq 0{,}14\,\mathrm{W}.$$

Výkon 1 W není překročen ani v jednom případě. **2 body**