Řešení úloh krajského kola 62. ročníku Fyzikální olympiády ve školním roce 2020/2021

Kategorie E

Autoři úloh: V. Koudelková (2), J. Thomas (1, 4), I. Volf (3)

FO62E3-1: Král Hyacint a jeho poslové

a) Vzdálenost Tulipánov – Narcisberk označme $s = 1\,\mathrm{kj}$. Rychlost posla bude $u = 1\,\mathrm{kj/den}$, rychlost komořího $v = \frac{1}{3}\,\mathrm{kj/den} \doteq 0{,}333\,33\,\mathrm{kj/den}$. Vzdálenost komořího od Tulipánova budeme značit x. Jeden den trvá, než posel dojede ke komořímu. Druhý den komoří ujede vzdálenost $x_0 = \frac{1}{3}\,\mathrm{kj}$. Třetí den se komoří pohybuje proti druhému poslu. Jejich vzájemná rychlost je $v_1 = u + v$ a setkají se za dobu

$$t_1 = \frac{s - x_0}{v_1} = \frac{1\,\mathrm{kj} - \dfrac{1}{3}\,\mathrm{kj}}{1\,\mathrm{kj/den} + \dfrac{1}{3}\,\mathrm{kj/den}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{dne} = 0{,}5\,\mathrm{dne},$$

tedy v čase $2\,\mathrm{dny} + t_1 = 2\frac{1}{2}\mathrm{dne}$ po výjezdu prvního posla. K setkání s druhým poslem dojde ve vzdálenosti

$$x_1 = x_0 + vt_1 = \frac{1}{3}\,\mathrm{kj} + \frac{1}{3}\,\mathrm{kj/den} \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{dne} = \frac{1}{2}\,\mathrm{kj} = 0{,}5\,\mathrm{kj}$$

od Tulipánova. **3 body**

Poznámka: Platí také

$$x_1 = s - ut_1 = 1\,\mathrm{kj} - 1\,\mathrm{kj/den} \cdot \frac{1}{2}\mathrm{dne} = \frac{1}{2}\mathrm{kj}.$$

b) Komoří pak obrátí směr jízdy a po zbytek dne, tj. po dobu $t_1' = 1\,\mathrm{den} - t_1 = \frac{1}{2}\mathrm{dne}$ se vrací. Na konci třetího dne bude ve vzdálenosti

$$x_2 = x_1 - vt_1' = \frac{1}{2}\,\mathrm{kj} - \frac{1}{3}\,\mathrm{kj/den} \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{dne} = \frac{1}{3}\,\mathrm{kj} \doteq 0{,}333\,33\,\mathrm{kj}.$$

od Tulipánova. Čtvrtý den vyjíždí třetí posel. Dohání přitom komořího, proto je jejich vzájemná rychlost $v_2 = u – v$. Komořího dohoní za čas

$$t_2 = \frac{s - x_2}{v_2} = \frac{1\,\mathrm{kj} - \dfrac{1}{3}\mathrm{kj}}{1\,\mathrm{kj/den} - \frac{1}{3}\,\mathrm{kj/den}} = 1\,\mathrm{den}.$$

tedy za $3\,\mathrm{dny} + t_2 = 4\,\mathrm{dny}$ po výjezdu prvního posla. Bude to ve vzdálenosti

$$x_3 = x_2 - vt_2 = \frac{1}{3}\,\mathrm{kj} - \frac{1}{3}\,\mathrm{kj/den} \cdot 1\,\mathrm{den} = 0\,\mathrm{kj},$$

komoří se stihne vrátit zpět do Tulipánova. **3 body**

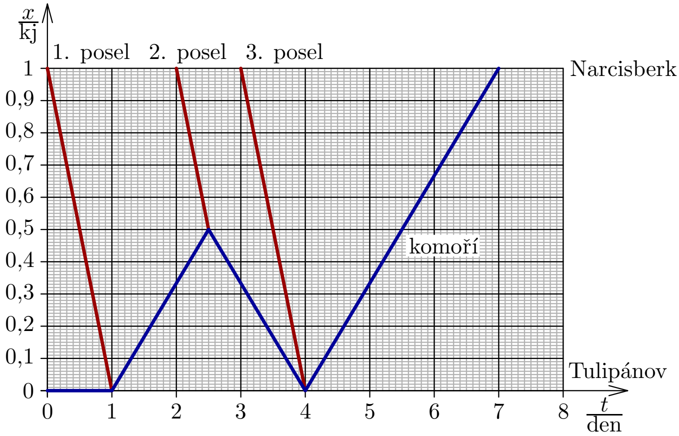
Poznámka: Opět lze vzdálenost od Tulipánova získat i z pohybu posla

$$x_3 = s - ut_2 = 1\,\mathrm{kj} - 1\,\mathrm{kj/den} \cdot 1\,\mathrm{den} = 0\,\mathrm{kj}.$$

c) Poslušný komoří obrátí směr jízdy. Cesta na Narcisberk mu bude podle zadání trvat další $t_4 = 3\,\mathrm{dny}$, od výjezdu prvního posla do příjezdu komořího uplyne tedy doba

$$t = 4\,\mathrm{dny} + t_4 = 4\,\mathrm{dny} + 3\,\mathrm{dny} = 7\,\mathrm{dnů}.$$ **1 bod**

d) Příklad grafu je na obr. 1. **3 body**



Obr. 1: K řešení úlohy FO62E3-1

FO62E3-2: Houpačka

a) Nechť Lenka a Kuba sedí např. vlevo, Lenka o hmotnosti $m_\mathrm{L} = 12\,\mathrm{kg}$ ve vzdálenosti $d_\mathrm{L} = 4\,\mathrm{m}/2 = 2\,\mathrm{m}$, Kuba o hmotnosti $m_\mathrm{K} = 15\,\mathrm{kg}$ ve vzdálenosti $d_\mathrm{K} = 2\,\mathrm{m} - 0{,}5\,\mathrm{m} = 1{,}5\,\mathrm{m}$. Martin o hmotnosti $m_\mathrm{M} = 24\,\mathrm{kg}$ sedí vpravo ve vzdálenosti $d_\mathrm{M} = d_\mathrm{K} = 1{,}5\,\mathrm{m}$. Po dosazení do vztahu pro momenty tíhových sil vzhledem ke středu houpačky dostáváme

$$m_\mathrm{L} g d_\mathrm{L} + m_\mathrm{K} g d_\mathrm{K} > m_\mathrm{M} g d_\mathrm{M}$$

neboli po dosazení

$$12\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 2{,}0\,\mathrm{m} + 15\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 1{,}5\,\mathrm{m} = 455{,}7\,\mathrm{N \cdot m} > \\ > 24\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 1{,}5\,\mathrm{m} = 352{,}8\,\mathrm{N \cdot m}.$$

Houpačka není v rovnováze a tatínek musí vpravo ve vzdálenosti $d_\mathrm{L} = 2\,\mathrm{m}$ působit silou F_1, pro kterou platí

$$m_\mathrm{L} g d_\mathrm{L} + m_\mathrm{K} g d_\mathrm{K} = m_\mathrm{M} g d_\mathrm{M} + F_1 d_\mathrm{L}$$

neboli

$$F_1 = g \frac{m_\mathrm{L} d_\mathrm{L} + m_\mathrm{K} d_\mathrm{K} - m_\mathrm{M} d_\mathrm{M}}{d_\mathrm{L}} = \\ = 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot \frac{12\,\mathrm{kg} \cdot 2{,}0\,\mathrm{m} + 15\,\mathrm{kg} \cdot 1{,}5\,\mathrm{m} - 24\,\mathrm{kg} \cdot 1{,}5\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{m}} = 51{,}45\,\mathrm{N} \doteq 51\,\mathrm{N}.$$

4 body

b) Protože $m_\mathrm{K} < m_\mathrm{M}$ a zároveň $d_\mathrm{K} = d_\mathrm{M}$, je zřejmé, že tatínek musí přejít doleva na Kubovu stranu a působit na vzdálenější sedačku ve vzdálenosti d_L silou F_2, pro kterou platí

$$F_2 d_\mathrm{L} + m_\mathrm{K} g d_\mathrm{K} = m_\mathrm{M} g d_\mathrm{K},$$

odkud vyjádříme

$$F_2 = g d_\mathrm{K} \frac{m_\mathrm{M} - m_\mathrm{K}}{d_\mathrm{L}} = 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 1{,}5\,\mathrm{m} \cdot \frac{24\,\mathrm{kg} - 15\,\mathrm{kg}}{2\,\mathrm{m}} = 66{,}15\,\mathrm{N} \doteq 66\,\mathrm{N}.$$

3 body

c) Nejlepší uspořádání je takové, kdy Kuba a Lenka jsou na stejné straně (protože Martin je výrazně těžší) a Kuba je dál od osy (tedy má větší moment síly a lépe vyvažuje Martina). V tomto uspořádání si Kuba s Lenkou vymění sedačky ($d_\mathrm{K} = 2\,\mathrm{m}$, $d_\mathrm{L} = 1{,}5\,\mathrm{m}$) a dohromady působí momentem síly

$$M_\mathrm{vlevo} = m_\mathrm{L} g d_\mathrm{L} + m_\mathrm{K} g d_\mathrm{K} = g\,(m_\mathrm{L} d_\mathrm{L} + m_\mathrm{K} d_\mathrm{K}) = \\ = 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot (12\,\mathrm{kg} \cdot 1{,}5\,\mathrm{m} + 15\,\mathrm{kg} \cdot 2{,}0\,\mathrm{m}) = 470{,}40\,\mathrm{N \cdot m} \doteq 470\,\mathrm{N \cdot m}.$$

Přesně je vyváží Martin, který si sedne na vzdálenější sedačku

$$M_\mathrm{vpravo} = m_\mathrm{M} g d_\mathrm{M} = 24\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 2{,}0\,\mathrm{m} = 470{,}40\,\mathrm{N \cdot m} \doteq 470\,\mathrm{N \cdot m}.$$

3 body

FO62E3-3: Elektrárny

a) Při plném výkonu obou bloků dohromady $P = 2 \cdot 1\,100\,\mathrm{MW} = 2\,200\,\mathrm{MW}$ doba činnosti t potřebná k dodání energie $E = 15{,}746\,\mathrm{TWh} = 15{,}746 \cdot 10^{12}\,\mathrm{Wh}$ vychází

$$t = \frac{E}{P} = \frac{15{,}746 \cdot 10^{12}\,\mathrm{Wh}}{2\,200\,000\,000\,\mathrm{W}} \doteq 7\,157{,}3\,\mathrm{h} = \frac{7\,157{,}3}{24}\mathrm{dnů} \doteq 298{,}22\,\mathrm{dne} \doteq 300\,\mathrm{dní}.$$

2 body

b) Pro tepelnou elektrárnu při účinnosti $\eta = 36\,\%$ a výhřevnosti $H = 15\,\mathrm{MJ/kg}$ pro hmotnost uhlí m spotřebovaného za dobu $t = 1\,\mathrm{den} = 86\,400\,\mathrm{s}$ při stejném výkonu P jako JETE platí

$$\eta m H = Pt;$$

$$m = \frac{Pt}{\eta H} = \frac{2\,200\,000\,000\,\mathrm{W} \cdot 86\,400\,\mathrm{s}}{0{,}36 \cdot 15\,000\,000\,\mathrm{J/kg}} = 35\,200\,000\,\mathrm{kg} \doteq 35\,000\,\mathrm{tun}.$$

Za přestupný rok 2020 by se v elektrárně spotřebovalo
$366 \cdot 35\,200\,\mathrm{t} \doteq 12\,883\,000\,\mathrm{t} \doteq 13\,000\,000\,\mathrm{t}$ uhlí. **3 body**

c) Ve skutečnosti se při dodání energie $E = 15{,}746\,\mathrm{TWh} \doteq 5{,}668\,6 \cdot 10^{16}\,\mathrm{J}$ ušetřilo

$$m_\mathrm{r} = \frac{E}{\eta H} = \frac{5{,}668\,6 \cdot 10^{16}\,\mathrm{J}}{0{,}36 \cdot 15 \cdot 10^{6}\,\mathrm{J/kg}} \doteq 10\,497\,000\,000\,\mathrm{kg} \doteq 10\,000\,000\,\mathrm{t}.$$

Pokud jeden vagón pojme $m_1 = 40\,\mathrm{t}$, vypočítaná hmotnost odpovídá počtu

$$n = \frac{m_\mathrm{r}}{m_1} = \frac{10\,497\,000\,\mathrm{t}}{40\,\mathrm{t}} \doteq 262\,425 \doteq 260\,000$$

vagónů. **2 body**

Poznámka: K výsledku lze dospět i bez převodu z Wh na J a to přes počet dní t, který odpovídá provozu elektrárny na plný výkon v roce. Dostaneme pak

$$m_\mathrm{r} = mt = 35\,200\,\mathrm{tun/den} \cdot 298{,}22\,\mathrm{dne} \doteq 10\,497\,000\,\mathrm{t} \doteq 10\,000\,000\,\mathrm{t}.$$

d) Z celkového průtoku se využije jen desetina, tj. objem $V = 600\,\mathrm{m^3}$ vody o hustotě $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$, jejíž hmotnost $M = \varrho V = 600 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$. Jestliže se polohová energie vody daná hloubkou vodopádu $h = 50\,\mathrm{m}$ v čase $t_1 = 1\,\mathrm{s}$ využije s účinností $\eta_1 = 80\,\%$, platí

$$\eta M g h = P t_1,$$

$$P = \frac{\eta M g h}{t_1} = \frac{0{,}8 \cdot 600 \cdot 10^3\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} \cdot 50\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = 235{,}2\,\mathrm{MW} \doteq 240\,\mathrm{MW},$$

což odpovídá asi osmině výkonu obou bloků JETE. **3 body**

Poznámka: Pokud řešitelé budou počítat s délkou roku 365 dní, doporučujeme odpovědi uznat za správné, číselné hodnoty vyjdou řádově stejné.

FO62E3-4: Domácí lampička

a) Ze zadaných údajů vychází příkon

$$P = U_{\text{ž}} I = 3{,}6\,\mathrm{V} \cdot 0{,}300\,\mathrm{A} = 1{,}08\,\mathrm{W} \doteq 1{,}1\,\mathrm{W}$$

a odpor vlákna žárovky

$$R_{\text{ž}} = \frac{U_{\text{ž}}}{I} = \frac{3{,}6\,\mathrm{V}}{0{,}300\,\mathrm{A}} = 12\,\Omega.$$ **2 body**

b) Při odebírání proudu $I = 300\,\mathrm{mA}$ a kapacitě baterie $K_1 = 1\,200\,\mathrm{mAh}$ (jde v podstatě o elektrický náboj, takže bychom ji mohli značit i Q_1) vydrží lampička svítit po dobu

$$t_1 = \frac{K_1}{I} = \frac{1\,200\,\mathrm{mAh}}{300\,\mathrm{mA}} = 4\,\mathrm{h}.$$

Baterie za dobu $t_1 = 4 \cdot 3\,600\,\mathrm{s} = 14\,400\,\mathrm{s}$ dodá energii

$$E_1 = Pt_1 = 1{,}08\,\mathrm{W} \cdot 4{,}0\,\mathrm{h} = 4{,}32\,\mathrm{Wh} = 1{,}08\,\mathrm{W} \cdot 14\,400\,\mathrm{s} = 15\,552\,\mathrm{J} \doteq 16\,\mathrm{kJ}.$$

2 body

c) Žárovkou má protékat proud $I = 300\,\mathrm{mA}$ a má na ní být napětí $U_{\text{ž}} = 3{,}6\,\mathrm{V}$. Na rezistoru pak musí být napětí $U_{\mathrm{R}} = U - U_{\text{ž}} = 4{,}5\,\mathrm{V} - 3{,}6\,\mathrm{V} = 0{,}90\,\mathrm{V}$, protéká jím stejný proud jako žárovkou. Pro jeho odpor vychází

$$R = \frac{U_{\mathrm{R}}}{I} = \frac{0{,}90\,\mathrm{V}}{0{,}300\,\mathrm{A}} = 3{,}0\,\Omega.$$

Z baterie s kapacitou $K_2 = 3\,500\,\mathrm{mAh}$ je možné proud $I = 300\,\mathrm{mA}$ odebírat po dobu

$$t_2 = \frac{K_2}{I} = \frac{3\,500\,\mathrm{mAh}}{300\,\mathrm{mA}} \doteq 11{,}667\,\mathrm{h} \doteq 12\,\mathrm{h}.$$ **3 body**

Poznámka: K času lze dospět i porovnáním kapacit

$$t_2 = \frac{K_2}{K_1} t_1 = \frac{3\,500\,\mathrm{mAh}}{1\,200\,\mathrm{mAh}} \cdot 4\,\mathrm{h} \doteq 11{,}667\,\mathrm{h} \doteq 12\,\mathrm{h}.$$

Při těchto úvahách zanedbáváme, že využitelná kapacita baterie závisí na odebíraném proudu. Vzhledem k tomu, že odebíraný proud je poměrně veliký, skutečná doba by oproti vypočtené byla o něco menší, jde pouze o horní odhad. V praxi by se projevil i vnitřní odpor baterie, který podle zadání zanedbáváme.

d) Při sériovém zapojení rezistorů se jejich odpory sčítají a výsledný odpor je dán součtem jejich odporů, tímto zapojením nelze získat hodnotu $R = 3{,}0\,\Omega \leqq R_1, R_2$. Naopak při paralelním zapojení platí

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \qquad \Longrightarrow \qquad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Dosazením ověříme

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3{,}3\,\Omega \cdot 33\,\Omega}{3{,}3\,\Omega + 33\,\Omega} = 3{,}0\,\Omega.$$

Rezistory je potřeba zapojit paralelně (vedle sebe). **3 body**