Řešení úloh školního kola 62. ročníku Fyzikální olympiády ve školním roce 2020/2021

Kategorie E a F

Autoři úloh: L. Richterek (3, 5), V. Šebeň (11, FO SR), J. Thomas (1–2, 4, 6, 8–10), I. Volf (7), Всесибирская олимпиада по физике 2017 (12)

FO62EF1-1: Zapomnětlivý řidič

a) Paní Nováková ujede do setkání s manželem rychlostí $v_2 = 75\,\mathrm{km/h}$ za čas t_2 vzdálenost $x = v_2 t_2$, její manžel vyjel o $10\,\mathrm{min} = \frac{1}{6}\mathrm{h}$ dříve, na ujetí stejné vzdálenosti rychlostí $v_1 = 50\,\mathrm{km/h}$ měl čas $t_1 = t_2 + \frac{1}{6}\mathrm{h}$, takže $x = v_1 t_1 = v_1\left(t_2 + \frac{1}{6}\mathrm{h}\right)$. Získáváme rovnici

$$v_2 t_2 = v_1\left(t_2 + \frac{1}{6}\mathrm{h}\right) \quad \text{neboli} \quad 75\,\mathrm{km/h}\cdot t_2 = 50\,\mathrm{km/h}\cdot t_2 + \frac{50}{6}\,\mathrm{km}.$$

Paní Nováková proto dojede manžela za čas

$$t_2 = \frac{50/6\,\mathrm{km}}{75\,\mathrm{km/h} - 50\,\mathrm{km/h}} = \frac{1}{3}\,\mathrm{h} = 20\,\mathrm{min},$$

tj. v $6{:}00\,\mathrm{h} + 10\,\mathrm{min} + 20\,\mathrm{min} = 6{:}30\,\mathrm{h}$ ve vzdálenosti $x = v_2 t_1 = 75\,\mathrm{km/h}\cdot\frac{1}{3}\mathrm{h} = 25\,\mathrm{km}$. **3 body**

b) Panu Novákovi zbývá ujet $s_2 = s - x = 80\,\mathrm{km} - 25\,\mathrm{km} = 55\,\mathrm{km}$; při rychlosti $v_3 = 60\,\mathrm{km/h} = 1\,\mathrm{km/min}$ to bude trvat dobu $t_3 = s_2/v_3 = 55\,\mathrm{km}/(60\,\mathrm{km/h}) = \frac{55}{60}\,\mathrm{h} = 55\,\mathrm{min}$. Se zastavením na předání mobilu, které trvalo 5 min, ujel cestu za

$$t = 10\,\mathrm{min} + 20\,\mathrm{min} + 5\,\mathrm{min} + 55\,\mathrm{min} = 90\,\mathrm{min} = 1\,\mathrm{h}\,30\,\mathrm{min},$$

do města přijede v 7:30 h. **2 body**

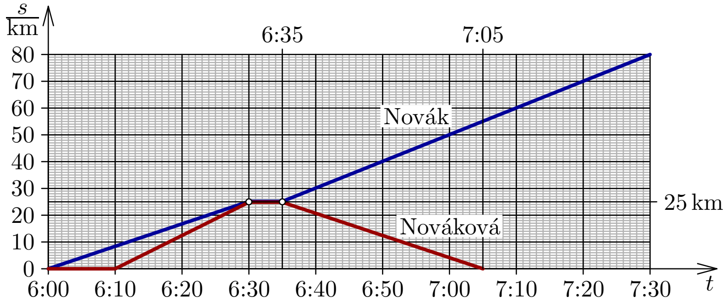
Paní Nováková se domů vrací menší rychlostí, cesta zpět jí bude trvat $t_4 = x/v_1 = 25\,\mathrm{km}/(50\,\mathrm{km/h}) = \frac{1}{2}\mathrm{h} = 30\,\mathrm{min}$, domů se vrátí za

$$t' = 10\,\mathrm{min} + 20\,\mathrm{min} + 5\,\mathrm{min} + 30\,\mathrm{min} = 65\,\mathrm{min} = 1\,\mathrm{h}\,5\,\mathrm{min},$$

po odjezdu pana Nováka, tedy v 7:05 h. **2 body**

Poznámka: Časy příjezdu do zaměstnání či domů lze spočítat i přičtením časů t_3 a t_4 v času 6:35 h, kdy skončilo setkání a předání mobilu.

c) Příklad grafu je na obr. 1.



Obr. 1: K řešení úlohy FO62EF1-1 **3 body**

FO62F1-2: Rozhledna na Velké Deštné

a) Celková výška vyhlídkové plošiny je $h = 3{,}7\,\mathrm{m} + 4 \cdot 3{,}4\,\mathrm{m} = 17{,}3\,\mathrm{m} \doteq 17\,\mathrm{m}$. Na jeden schod připadá v průměru $s = h/96 = 17{,}3\,\mathrm{m}/96 \doteq 0{,}180\,21\,\mathrm{m} \doteq 18\,\mathrm{cm}$. **2 body**

Poznámka: Celé číslo nevychází proto, že předpoklad stejné výšky je pouze přibližný, točité schodiště v posledním úseku se liší od schodů v nižších patrech.

b) Druhé patro je ve výšce $h_2 = 3{,}7\,\mathrm{m} + 3{,}4\,\mathrm{m} = 7{,}1\,\mathrm{m}$, Dan ji vystoupal za čas $t_1 = 15\,\mathrm{s}$, pohyboval se rychlostí $v_{12} = h_2/t_1 = 7{,}1\,\mathrm{m}/15\,\mathrm{s} \doteq 0{,}473\,33\,\mathrm{m/s} \doteq 0{,}47\,\mathrm{m/s}$. **2 body**

c) Mezi 2. a 3. patrem se pohyboval rychlostí $v_3 = 0{,}9 v_{12} = 0{,}9 \cdot 0{,}473\,33\,\mathrm{m/s} = 0{,}426\,\mathrm{m/s} \doteq 0{,}43\,\mathrm{m/s}$ a úsek urazil za čas $t_3 = 3{,}4\,\mathrm{m}/(0{,}426\,\mathrm{m/s}) \doteq 7{,}981\,2\,\mathrm{s} \doteq 8{,}0\,\mathrm{s}$, mezi 3. a 4. rychlostí $v_4 = 0{,}9 v_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}426\,\mathrm{m/s} = 0{,}383\,4\,\mathrm{m/s} \doteq 0{,}38\,\mathrm{m/s}$ v čase $t_4 = 3{,}4\,\mathrm{m}/(0{,}383\,4\,\mathrm{m/s}) \doteq 8{,}868\,\mathrm{s} \doteq 8{,}9\,\mathrm{s}$ a mezi 4. a 5. rychlostí $v_5 = 0{,}9 v_4 = 0{,}9 \cdot 0{,}383\,4\,\mathrm{m/s} = 0{,}345\,06\,\mathrm{m/s} \doteq 0{,}35\,\mathrm{m/s}$ v čase $t_5 = 3{,}4\,\mathrm{m}/(0{,}345\,06\,\mathrm{m/s}) \doteq 9{,}853\,4\,\mathrm{s} \doteq 9{,}9\,\mathrm{s}$. **3 body**

Celkem Dan stoupal na rozhlednu po dobu

$t_\mathrm{d} = t_1 + t_3 + t_4 + t_5 = 15\,\mathrm{s} + 7{,}981\,2\,\mathrm{s} + 8{,}868\,\mathrm{s} + 9{,}852\,4\,\mathrm{s} = 41{,}703\,\mathrm{s} \doteq 42\,\mathrm{s}$. **1 bod**

d) Tom zvládne první dvě patra za čas $t_2 = 20\,\mathrm{s}$ a pohybuje se rychlostí $v = h_2/t_2 = 7{,}1\,\mathrm{m}/(20\,\mathrm{s}) \doteq 0{,}355\,\mathrm{m/s} \doteq 0{,}36\,\mathrm{m/s}$ a celý výstup za $t_\mathrm{t} = h/v = 17{,}3\,\mathrm{m}/(0{,}355\,\mathrm{m/s}) \doteq 48{,}732\,\mathrm{s} \doteq 49\,\mathrm{s}$. Protože $t_\mathrm{d} < t_\mathrm{t}$, Dan bude na vyhlídkové plošině dříve. **2 body**

FO62EF1-3: Poštolka a hraboš

a) Polohová energie poštolky o hmotnosti $m = 220\,\mathrm{g} = 0{,}22\,\mathrm{kg}$ ve výšce $h = 20\,\mathrm{m}$ je dána vztahem

$$E_\mathrm{p} = mgh = 0{,}22\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 20\,\mathrm{m} = 43{,}12\,\mathrm{J} \doteq 43\,\mathrm{J}.$$ **1 bod**

b) Při zanedbání odporu vzduchu můžeme vycházet ze zákona zachování energie. Polohová energie poštolky se přemění na kinetickou energii těsně nad zemí, tj. $E_\mathrm{p} = E_\mathrm{k}$, neboli

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2; \qquad \text{odtud} \qquad v^2 = 2gh, \qquad v = \sqrt{2gh}.$$

Po dosazení vychází

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} \cdot 20\,\mathrm{m}} \doteq 19{,}799\,\mathrm{m/s} \doteq 20\,\mathrm{m/s}.$$

Ve skutečnosti poštolka nad zemí musí přibrzdit roztažením křídel, aby sama nenarazila tak velkou rychlostí na zem ($20\,\mathrm{m/s} = 72\,\mathrm{km/h}$), takže nepadá po celé výšce a nejvyšší dosažená rychlost bude o něco menší. Rychlost bude menší i díky odporu vzduchu. **3 body**

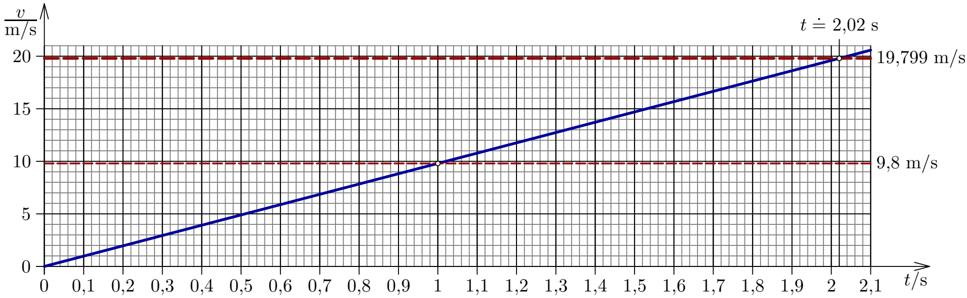
Poznámka: Řešitelé mohou využít i potenciální energii vypočítanou v části a), potom

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}mv^2; \qquad \text{odtud} \qquad v^2 = \frac{2E_\mathrm{p}}{m}, \qquad v = \sqrt{\frac{2E_\mathrm{p}}{m}}$$

a po dosazení

$$v = \sqrt{\frac{2E_\mathrm{p}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 43{,}12\,\mathrm{J}}{0{,}22\,\mathrm{kg}}} \doteq 19{,}799\,\mathrm{m/s} \doteq 20\,\mathrm{m/s}.$$

c) Rychlost poštolky roste přímo úměrně s časem, každou sekundu se zvětší o $\Delta v = 9{,}8\,\mathrm{m/s}$. Graf závislosti rychlosti na čase je na obr. 2. Z grafu odečteme, že



Obr. 2: K řešení úlohy FO62EF1-3

rychlosti 19,799 m/s vypočítané v části b) dosáhne za čas $t \doteq 2{,}02\,\mathrm{s}$. **4 body**

I výpočtem můžeme ověřit, že poštolka dosáhne rychlosti v za čas

$$t = \frac{v}{\Delta v} \cdot 1\,\mathrm{s} = \frac{19{,}799\,\mathrm{m/s}}{9{,}8\,\mathrm{m/s}} \cdot 1\,\mathrm{s} \doteq 2{,}020\,3\,\mathrm{s} \doteq 2{,}0\,\mathrm{s}.$$

d) Hraboš se rychlostí $v_1 = 9{,}0\,\mathrm{km/h} = 2{,}5\,\mathrm{m/s}$ může pohybovat po dobu kratší než $t_1 + t$, vzdálenost mezi norami tak musí být kratší než

$$d = v_1\,(t_1 + t) = 2{,}5\,\mathrm{m/s} \cdot (0{,}25\,\mathrm{s} + 2{,}020\,3\,\mathrm{s}) \doteq 5{,}675\,8\,\mathrm{m} \doteq 5{,}6\,\mathrm{m}.$$

Z logiky zadání má smysl výsledek zaokrouhlit dolů.

Menší skutečná rychlost poštolky diskutovaná v části b) dává hrabošovi více času, vzdálenost děr by pak mohla být o něco větší. **2 body**

Poznámka: Vzhledem k tomu, že čas t v části c) mohou řešitelé odhadovat z grafu, doporučujeme tolerovat výsledek v části d) v rozmezí 5,5 m–6,0 m; vzhledem k použitému zjednodušenému modelu pro pohyb poštolky je tato přesnost dostačující.

FO62EF1-4: Skládání písku

a) Celková hmotnost písku je $m = \varrho V = 1\,600\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 3\,\mathrm{m^3} = 4\,800\,\mathrm{kg}$. Karel tedy musí jet $n = m/m_1 = 4\,800\,\mathrm{kg}/120\,\mathrm{kg} = 40$, tj. 40krát. **2 body**

b) Z rovnováhy momentů vzhledem k ose otáčení $m_\mathrm{k} g r_1 = F_1 r_2$ dostáváme

$$F_1 = m_\mathrm{k} g \frac{r_1}{r_2} = 23\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot \frac{0{,}4\,\mathrm{m}}{1{,}4\,\mathrm{m}} = 64{,}4\,\mathrm{N} \doteq 64\,\mathrm{N}.$$ **3 body**

c) Z rovnováhy momentů nyní plyne $(m_\mathrm{k} + m_1)\,gr_3 = F_2r_2$ a odtud

$$F_2 = (m_\mathrm{k} + m_1)\,g\frac{r_3}{r_2} = (23\,\mathrm{kg} + 120\,\mathrm{kg}) \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot \frac{0{,}2\,\mathrm{m}}{1{,}4\,\mathrm{m}} = 200{,}20\,\mathrm{N} \doteq 200\,\mathrm{N}.$$

3 body

d) Práce při naložení jednoho kolečka vychází $W_1 = m_1gh = 120\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 0{,}40\,\mathrm{m} = 470{,}40\,\mathrm{J} \doteq 470\,\mathrm{J}$. Celkem Karel vykoná při nakládání práci $W = m_gh = 4\,800\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 0{,}40\,\mathrm{m} = 18\,816\,\mathrm{J} \doteq 19\,\mathrm{kJ}$. Platí samozřejmě $W = 40W_1$. **2 body**

FO62EF1-5: MVE Rudolfov I a nádrž Bedřichov

a) Mechanická polohová energie vody mgh se přeměňuje na elektrickou energii s hledanou účinností η, za čas $t = 1\,\mathrm{s}$ se přemění energie vody o hmotnosti dané součinem hustoty a objemového průtoku $m = \varrho V/t = \varrho Q$. Pro výkon dodávaný vodou platí

$$P_0 = \frac{mhg}{t} = \frac{\varrho Vhg}{t} = \varrho Qgh =$$
$$= 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}65\,\mathrm{m^3/s} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 170\,\mathrm{m} = 1\,082\,900\,\mathrm{W} \doteq 1\,100\,\mathrm{kW}.$$

Jestliže elektrárna dodává do sítě výkon $P = 916\,\mathrm{kW}$, je její účinnost

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{916\,\mathrm{kW}}{1\,082{,}9\,\mathrm{kW}} = 0{,}845\,88 \doteq 85\,\%.$$

3 body

b) Na plochu povodí $S = 4{,}31\,\mathrm{km^2} = 4\,310\,000\,\mathrm{m^2}$ napršela vrstva vody o výšce $h_1 = 345\,\mathrm{mm} = 0{,}345\,\mathrm{m}$, její celkový objem

$$V_1 = Sh_1 = 4\,310\,000\,\mathrm{m^2} \cdot 0{,}345\,\mathrm{m} = 1\,486\,950\,\mathrm{m^3} \doteq 1\,500\,000\,\mathrm{m^3}.$$

Protože $V_1 < V = 1\,709\,000\,\mathrm{m^3}$ ($V_1/V \doteq 0{,}87 = 87\,\%$), prázdná přehrada by byla schopná takové mimořádné dešťové srážky pojmout. Vodní nádrž Bedřichov byla postavena v letech 1902–1905 právě kvůli zkušenostem s povodněmi roku 1897. **3 body**

c) Pokud by voda odtékala průtokem $Q = 0{,}65\,\mathrm{m^3/s}$, trvalo by to čas

$$t = \frac{1\,486\,950\,\mathrm{m^3}}{0{,}65\,\mathrm{m^3/s}} \doteq 2\,287\,600\,\mathrm{s} \doteq 26\,\text{dní}\,11\,\mathrm{h}\,27\,\mathrm{min}.$$

1 bod

Z tohoto množství by elektrárně bylo možné vyrobit

$$E_1 = \eta\varrho Vhg = 0{,}845\,88 \cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 170\,\mathrm{m} \doteq$$
$$\doteq 2\,095\,500\,000\,000\,\mathrm{J} \doteq 2\,100\,\mathrm{GJ} \doteq 580\,000\,\mathrm{kWh}$$

elektrické energie. **2 body**

Ve výpočtu jsme nebrali v úvahu, že část vody pohltí půda a zadrží lesní rostliny (a ta se částečně vypaří). Voda z nádrže není všechna používána pro elektrárnu (u elektrárny pracující pouze ve špičkách to ani není možné), část se jí pouští korytem Černé Nisy. Na stránkách povodí Labe (`http://www.pla.cz/planet/public/vodnidila/prehrada_bedrichov.pdf`) lze zjistit, že běžný průtok vody přehradou je $0{,}126\,\mathrm{m^3/s}$, tj. skoro dvojnásobný, než přítok vody do elektrárny Q. **1 bod**

Poznámka: Energii můžeme určit i z času t a výkonu elektrárny $P = 916\,\mathrm{kW} =$

$= 916\,000\,\mathrm{W}$ pomocí vztahu $E_1 = Pt = 916\,000\,\mathrm{W} \cdot 2\,287\,600\,\mathrm{s} \doteq 2\,100\,\mathrm{GJ}$.

FO62EF1-6: Akvárium

a) Do akvária se vejde objem $V_\mathrm{a} = abh = 60\,\mathrm{cm} \cdot 40\,\mathrm{cm} \cdot 40\,\mathrm{cm} = 96\,000\,\mathrm{cm}^3 = 96\,\mathrm{l}$. Při nalití objemu $V = 80$ litrů $= 80\,000\,\mathrm{cm}^3$ bude roztok sahat do výšky

$$h_1 = \frac{V}{ab} = \frac{80\,000\,\mathrm{cm}^3}{60\,\mathrm{cm} \cdot 40\,\mathrm{cm}} \doteq 33{,}333\,\mathrm{cm} \doteq 33\,\mathrm{cm}.$$ **2 body**

Poznámka: Ke stejnému výsledku dojdeme i z úvahy, že poměr výšky, do které sahá roztok, a výšky akvária musí být stejný jako poměr objemů

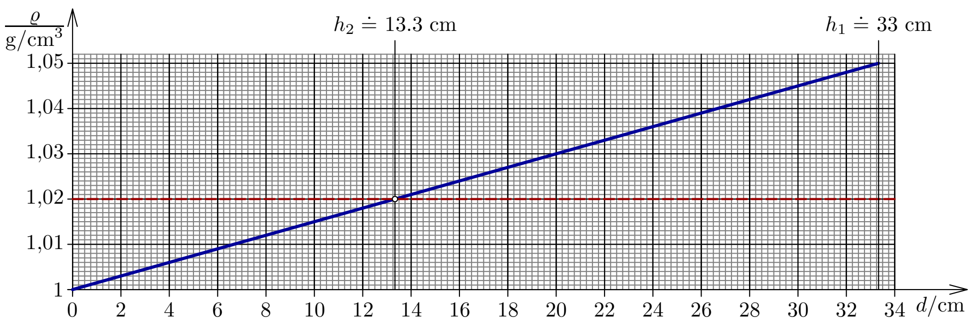
$$h_1 = \frac{V}{V_\mathrm{a}} h = \frac{80\,\mathrm{l}}{96\,\mathrm{l}} \cdot 40\,\mathrm{cm} \doteq 33{,}333\,\mathrm{cm} \doteq 33\,\mathrm{cm}.$$

b) V akváriu má být $V = 80\,000\,\mathrm{cm}^3$ roztoku. Jeho hmotnost bude $m = \varrho V = 1{,}025\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 80\,000\,\mathrm{cm}^3 = 82\,000\,\mathrm{g} = 82\,\mathrm{kg}$. Aby byl roztok 3%, musí obsahovat $m' = 0{,}03m = 0{,}03 \cdot 82\,\mathrm{kg} = 2{,}46\,\mathrm{kg}$ soli a $m'' = m - m' = 82\,\mathrm{kg} - 2{,}46\,\mathrm{kg} = 79{,}54\,\mathrm{kg} \doteq 79{,}5\,\mathrm{kg}$ vody (tj. 79,5 litrů vody). Na přípravu roztoku musí Filip vzít 2,5 kg soli a 79,5 litru vody. **3 body**

c) Hustota materiálu hračky je

$$\varrho_3 = \frac{m_1}{V_1} = \frac{5{,}10\,\mathrm{g}}{5{,}0\,\mathrm{cm}^3} = 1{,}02\,\mathrm{g/cm^3}.$$

Hračka se bude nacházet v hloubce pod hladinou, ve které je právě tato hustota. Z grafické závislosti hustoty ϱ na hloubce d pod hladinou na obr. 3 vidíme, že



Obr. 3: K řešení úlohy FO62EF1-6

lze psát

$$h_2 = \frac{20}{50} h_1 = \frac{20}{50} \cdot 33{,}333\,\mathrm{cm} = 13{,}333\,\mathrm{cm} \doteq 13\,\mathrm{cm},$$

hračka bude plavat asi 13 cm pod hladinou. **2 body**

d) Podle Archimédova zákona se tíhová síla rovná síle vztlakové a je ponořeno 80 % objemu člověka $V_\mathrm{č}$, tj. $0{,}8V_\mathrm{č}$. Platí proto

$$\varrho_\mathrm{č} V_\mathrm{č} g = \varrho_\mathrm{m} 0{,}8 V_\mathrm{č} g,$$

odkud
$$\varrho_\mathrm{m} = \varrho_\mathrm{č}\frac{V_\mathrm{č}}{0{,}8V_\mathrm{č}} = \frac{\varrho_\mathrm{č}}{0{,}8} = \frac{0{,}98\,\mathrm{g/cm^3}}{0{,}8} = 1{,}225\,\mathrm{g/cm^3} \doteq 1{,}2\,\mathrm{g/cm^3} > \varrho. \quad \textbf{3 body}$$

FO62EF1-7: Automobil a životní prostředí

a) Na ujetí vzdálenosti $d = 20\,000\,\mathrm{km} = 20\,000\,000\,\mathrm{m}$ mimo město při spotřebě $s_1 = 4{,}8\,\mathrm{l/100\,km}$ potřebujeme $V_1 = ds_1 = 20\,000\,\mathrm{km} \cdot 4{,}8\,\mathrm{l/100\,km} = 960$ litrů za rok, při městském provozu $V_2 = ds_2 = 20\,000\,\mathrm{km} \cdot 7{,}7\,\mathrm{l/100\,km} = 1\,540$ litrů $\doteq 1\,500$ litrů za rok. **3 body**

b) Spálením objemu V_1 benzínu při výhřevnosti $H = 32\,\mathrm{MJ/litr}$ a při účinnosti $\eta = 22\,\% = 0{,}22$ vykoná motor práci
$$W_1 = \eta H V_1 = 0{,}22 \cdot 32\,\mathrm{MJ/l} \cdot 960\,\mathrm{l} = 6\,758{,}4\,\mathrm{MJ} \doteq 6{,}8\,\mathrm{GJ},$$
spálením objemu V_2 práci
$$W_2 = \eta H V_2 = 0{,}22 \cdot 32\,\mathrm{MJ/l} \cdot 1\,540\,\mathrm{l} \doteq 10\,842\,\mathrm{MJ} \doteq 11\,\mathrm{GJ}. \quad \textbf{3 body}$$

c) Na ujetí vzdálenosti $d = 20\,000\,\mathrm{km}$ při emisích $p = 140\,\mathrm{g/km} = 0{,}140\,\mathrm{kg/km}$ vyprodukuje automobil
$$m = dp = 20\,000\,\mathrm{km} \cdot 0{,}140\,\mathrm{kg/km} = 2\,800\,\mathrm{kg} = 2{,}8\,\mathrm{t}\ \mathrm{CO_2}. \quad \textbf{2 body}$$

d) Při jednom výdechu se uvolní $0{,}4\,\mathrm{g} = 0{,}000\,4\,\mathrm{kg}$ CO_2, za minutu 15krát více, tj. $15 \cdot 0{,}000\,4\,\mathrm{kg} = 0{,}006\,\mathrm{kg}$, za den $24 \cdot 60 \cdot 0{,}006\,\mathrm{kg} = 8{,}64\,\mathrm{kg}$ a za rok $365 \cdot 8{,}64\,\mathrm{kg} = 3\,153{,}6\,\mathrm{kg} \doteq 3\,200\,\mathrm{kg} = 3{,}2\,\mathrm{t}$. **2 body**

Poznámka: Produkce CO_2 člověkem při dýchání závisí na řadě faktorů jako je tělesná námaha (a dechová frekvence), objem plic využívaný pro dýchání apod. Vypočítaná hodnota je pouze orientační.

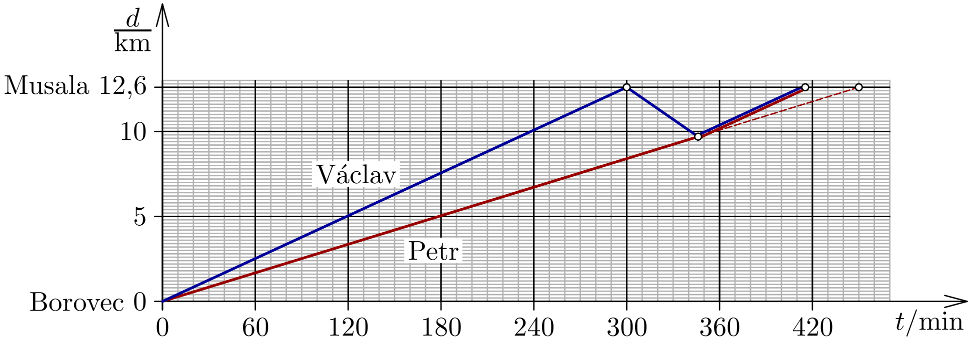
FO62EF1-8: Výstup na Musalu

a) Václav bude stoupat na vrchol po dobu
$$t_1 = \frac{L}{v_1} = \frac{12{,}6\,\mathrm{km}}{42\,\mathrm{m/min}} = \frac{12\,600\,\mathrm{m}}{42\,\mathrm{m/min}} = 300\,\mathrm{min} = 5\,\mathrm{h},$$
Petrovi bude výstup trvat dobu
$$t_2 = \frac{L}{v_2} = \frac{12{,}6\,\mathrm{km}}{28\,\mathrm{m/min}} = \frac{12\,600\,\mathrm{m}}{28\,\mathrm{m/min}} = 450\,\mathrm{min} = 7\,\mathrm{h}\,30\,\mathrm{min}. \quad \textbf{2 body}$$
Poznámka: Při řešení je možné převést rychlosti na obvyklejší jednotky m/s nebo km/h, tj. $v_1 = 42\,\mathrm{m/min} \doteq 0{,}70\,\mathrm{m/s} = 2{,}52\,\mathrm{km/h}$ a $v_2 = 28\,\mathrm{m/min} \doteq 0{,}466\,67\,\mathrm{m/s} = 1{,}68\,\mathrm{km/h}$.

b) Za dobu t_1 ujde Petr vzdálenost $l_1 = v_2 t_1 = 28\,\mathrm{m/min} \cdot 300\,\mathrm{min} = 8\,400\,\mathrm{m}$. Jdou teď s Václavem proti sobě, Václav rychlostí $1{,}5v_1 = 1{,}5 \cdot 40\,\mathrm{m/min} = 63\,\mathrm{m/min}$, Petr rychlostí $v_2 = 28\,\mathrm{m/min}$. Setkají se za dobu
$$t_3 = \frac{L - l_1}{1{,}5v_1 + v_2} = \frac{12\,600\,\mathrm{m} - 8\,400\,\mathrm{m}}{1{,}5 \cdot 42\,\mathrm{m/min} + 28\,\mathrm{m/min}} \doteq 46{,}154\,\mathrm{min}.$$
Václav za tu dobu ušel vzdálenost
$$l_3 = 1{,}5v_1 t_3 = 1{,}5 \cdot 42\,\mathrm{m/min} \cdot 46{,}154\,\mathrm{min} = 2\,907{,}7\,\mathrm{m}.$$

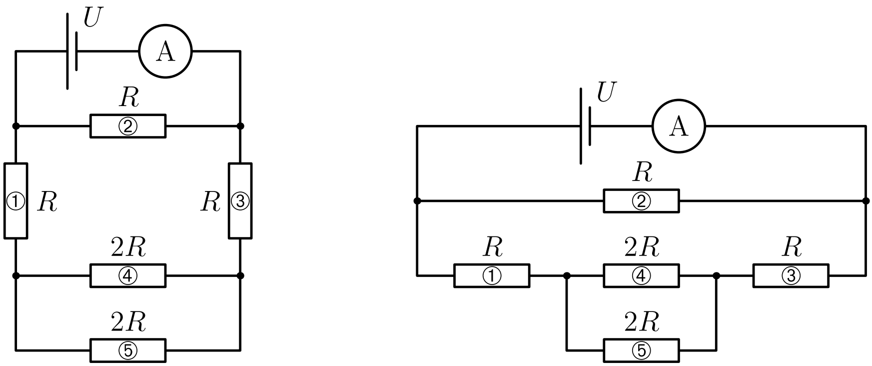
Převezme od Petra batoh a musí ujít ještě stejnou vzdálenost na zpáteční cestě rychlostí $v_1 = 42\,\mathrm{m/min}$. Bude mu to trvat ještě dobu $t_4 = l_3/v_1 = 2\,907{,}7\,\mathrm{m}/(42\,\mathrm{m/min}) \doteq 69{,}231\,\mathrm{min}$. Celkem mu bude výstup trvat dobu $t_1 + t_3 + t_4 = 300\,\mathrm{min} + 46{,}154\,\mathrm{min} + 69{,}231\,\mathrm{min} = 415{,}38\,\mathrm{min} \doteq 415\,\mathrm{min} = 6\,\mathrm{h}\,55\,\mathrm{min}$. Petr půjde zbytek cesty rychlostí $v_2 = 1{,}5 \cdot 28\,\mathrm{m/min} = 42\,\mathrm{m/min} = v_1$, tj. stejně velkou, jako Václav s batohem, na vrchol dorazí společně ve stejnou dobu. **4 body**

c) Příklad grafu je na obr. 4. Čárkovaně je navíc vyznačen případ, kdy by Petr na posledním úseku pokračoval s batohem dále sám podle výsledků v části a).



Obr. 4: K řešení úlohy FO62EF1-8 **4 body**

FO62E1-9: Elektrický obvod



Obr. 5: K řešení úlohy FO62E1-9

a) Určíme celkový odpor zapojení. Obvod postupně překreslíme do běžnější podoby a rezistory očíslujeme např. podle obr. 5. Odpory 4 a 5 jsou zapojeny vedle sebe a jejich výsledný odpor je

$$R_{45} = \frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} = R.$$

Ve větvi 1-45-3 tak máme 3 rezistory vedle sebe, jejich výsledný odpor bude $R_{1-45-3} = R + R + R = 3R$. Konečně celkový odpor obvodu odpovídá zapojení rezistoru 2 a 1-45-3 vedle sebe

$$R_{\mathrm{c}} = \frac{3R \cdot R}{3R + R} = \frac{3}{4}R = \frac{3}{4} \cdot 2\,000\,\Omega = 1\,500\,\Omega. \qquad \textbf{2 body}$$

Ampérmetr ukáže hodnotu proudu

$$I = \frac{U}{R_{\mathrm{c}}} = \frac{U}{\frac{3}{4}R} = \frac{4U}{3R} = \frac{4 \cdot 6{,}0\,\mathrm{V}}{3 \cdot 2\,000\,\Omega} = 0{,}004\,0\,\mathrm{A} = 4{,}0\,\mathrm{mA}. \qquad \textbf{2 body}$$

b) Na rezistoru 2 bude napětí $U_2 = U = 6{,}0\,\mathrm{V}$, na ostatních rezistorech bude stejné napětí $U_1 = U_3 = U_4 = U_5 = U/3 = 2{,}0\,\mathrm{V}$. **2 body**
Rezistorem 2 protéká proud $I_2 = U_2/R = 6{,}0\,\mathrm{V}/2\,000\,\Omega = 0{,}003\,0\,\mathrm{A} = 3{,}0\,\mathrm{mA}$. Rezistorem 1 a 3 protéká proud $I_1 = I_3 = U_1/R = 2{,}0\,\mathrm{V}/2\,000\,\Omega = 0{,}001\,0\,\mathrm{A} = 1{,}0\,\mathrm{mA}$ (zároveň musí platit $I = I_1 + I_2$). Rezistory 4 a 5 protéká proud $I_4 = I_5 = U_4/(2R) = 2{,}0\,\mathrm{V}/4\,000\,\Omega = 0{,}000\,50\,\mathrm{A} = 0{,}50\,\mathrm{mA}$ (platí $I_1 = 2I_4$). **2 body**

c) Teplo, které se uvolní na rezistorech za čas $t = 1\,\mathrm{min} = 60\,\mathrm{s}$ vychází

$$Q = \frac{U^2}{R_{\mathrm{c}}}t = \frac{(6{,}0\,\mathrm{V})^2}{1\,500\,\Omega} \cdot 60\,\mathrm{s} = 0{,}144\,\mathrm{J} \doteq 0{,}14\,\mathrm{J}. \qquad \textbf{2 body}$$

Poznámka: Zdlouhavěji můžeme ke stejnému výsledku dospět i tak, že spočítáme tepelný výkon na jednotlivých rezistorech, tj.

$$P_1 = U_1 I_1 = \frac{U_1^2}{R} = \frac{(2\,\mathrm{V})^2}{2\,000\,\Omega} = 0{,}002\,\mathrm{W},$$

$$P_2 = U_2 I_2 = \frac{U_2^2}{R} = \frac{(6\,\mathrm{V})^2}{2\,000\,\Omega} = 0{,}018\,\mathrm{W},$$

$$P_3 = U_3 I_3 = \frac{U_3^2}{R} = P_1 = 0{,}002\,\mathrm{W},$$

$$P_4 = U_4 I_4 = \frac{U_4^2}{2R} = \frac{(2\,\mathrm{V})^2}{2 \cdot 2\,000\,\Omega} = 0{,}001\,\mathrm{W},$$

$$P_5 = U_5 I_5 = \frac{U_5^2}{2R} = P_4 = 0{,}001\,\mathrm{W}.$$

Celkem dostáváme

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = \\ = 0{,}002\,\mathrm{W} + 0{,}018\,\mathrm{W} + 0{,}002\,\mathrm{W} + 0{,}001\,\mathrm{W} + 0{,}001\,\mathrm{W} = 0{,}024\,\mathrm{W}$$

a pro teplo $Q = Pt = 0{,}024\,\mathrm{W} \cdot 60\,\mathrm{s} = 0{,}144\,\mathrm{J} \doteq 0{,}14\,\mathrm{J}$.

FO62E1-10: Vaření kakaa

a) Hmotnost mléka o objemu $V = 0{,}5\,\mathrm{l} = 500\,\mathrm{cm}^3$ je $m = \varrho V = 1{,}1\,\mathrm{g/cm}^3 \cdot 500\,\mathrm{cm}^3 = 550\,\mathrm{g} = 0{,}55\,\mathrm{kg}$. Za čas $\tau_1 = 2\,\mathrm{min} = 120\,\mathrm{s}$ dodá mikrovlnná trouba k ohřevu teplo $Q = \eta P \tau_1$, které se využije na ohřátí mléka z teploty t_1 a hrnku z teploty t_2 na hledanou teplotu t. Můžeme proto psát

$$\eta P \tau_1 = m c_1 (t - t_1) + m_2 c_2 (t - t_2)\,;$$

po vyjádření dostáváme

$$t = \frac{\eta P \tau_1 + mc_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{mc_1 + m_2 c_2} =$$
$$= \frac{0{,}5 \cdot 1\,200\,\mathrm{W} \cdot 120\,\mathrm{s} + 0{,}55\,\mathrm{kg} \cdot 3\,900\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot 4\,{}^\circ\mathrm{C} + 0{,}4\,\mathrm{kg} \cdot 1\,100\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot 20\,{}^\circ\mathrm{C}}{0{,}55\,\mathrm{kg} \cdot 3\,900\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} + 0{,}4\,\mathrm{kg} \cdot 1\,100\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)}} \doteq$$
$$\doteq 34{,}576\,{}^\circ\mathrm{C} \doteq 35\,{}^\circ\mathrm{C}.$$

Výsledek přibližně odpovídá naší zkušenosti. **4 body**

Poznámka: Rovnici můžeme sestavit i tak, že započítáme teplo na ohřátí mléka na teplotu hrnku t_2 a pak teplo na ohřívání mléka a hrnku na výslednou teplotu t, rovnice pak má tvar

$$\eta P \tau_1 = mc_1 (t_2 - t_1) + (mc_1 + m_2 c_2)(t - t_2)$$

a vede ke stejné rovnici pro t.

Ve výpočtu zanedbáváme skutečnost, že v mikrovlnné troubě se více ohřívají látky obsahující vodu (v našem případě mléko) než nádobí. Na druhou stranu tepelná kapacita daného množství mléka je $C_1 = V \varrho_1 c_1 = 0{,}000\,5\,\mathrm{m^3} \cdot 1\,100\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 3\,900\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} = 2\,145\,\mathrm{J/{}^\circ C}$, porcelánového hrnku $C_2 = m_2 c_2 = 0{,}4\,\mathrm{kg} \cdot 1\,100\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} = 440\,\mathrm{J/{}^\circ C}$, v případě mléka je tedy téměř $5\times$ větší a má na výsledek větší vliv. Stává se také, že mléko bývá zahřáté nerovnoměrně, některá místa jsou horká, jiná chladnější.

b) Pro hledaný čas τ_2 podobně jako v části a) platí

$$\eta P \tau_2 = mc_1 (t_3 - t) + m_2 c_2 (t_3 - t_2),$$

odkud

$$\tau_2 = \frac{mc_1 (t_3 - t) + m_2 c_2 (t_3 - t_2)}{\eta P} =$$
$$= \frac{0{,}55 \cdot 3\,900\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot (90\,{}^\circ\mathrm{C} - 4\,{}^\circ\mathrm{C}) + 0{,}4\,\mathrm{kg} \cdot 1\,100\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot (90\,{}^\circ\mathrm{C} - 20\,{}^\circ\mathrm{C})}{0{,}5 \cdot 1\,200\,\mathrm{W}} \doteq$$
$$\doteq 358{,}78\,\mathrm{s} \doteq 6{,}0\,\mathrm{min}.$$

Spotřeba energie vychází $W = P\tau = 1\,200\,\mathrm{W} \cdot 358{,}78\,\mathrm{s} \doteq 430\,536\,\mathrm{J} \doteq 430\,\mathrm{kJ}$.

3 body

c) Doba zahřívání nyní bude

$$\tau_3 = \frac{mc_1 (t_3 - t_2) + m_2 c_2 (t_3 - t_2)}{\eta P} = \frac{mc_1 + m_2 c_2}{\eta P} (t_3 - t_2) =$$
$$= \frac{0{,}55 \cdot 3\,900\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} + 0{,}4\,\mathrm{kg} \cdot 1\,100\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)}}{0{,}5 \cdot 1\,200\,\mathrm{W}} \cdot (90\,{}^\circ\mathrm{C} - 20\,{}^\circ\mathrm{C}) \doteq$$
$$\doteq 301{,}58\,\mathrm{s} \doteq 5{,}0\,\mathrm{min}.$$

spotřeba energie $W_1 = P\tau_3 = 1\,200\,\mathrm{W} \cdot 301{,}58\,\mathrm{s} = 361\,896\,\mathrm{J} \doteq 360\,\mathrm{kJ}$. Protože

$$\frac{W_1}{W} \equiv \frac{\tau_3}{\tau_2} = \frac{361\,896\,\mathrm{J}}{430\,536\,\mathrm{J}} \doteq 0{,}840\,57 \doteq 84\,\%$$

Anička by ušetřila asi $100\,\% - 84\,\% = 16\,\%$ energie. **3 body**