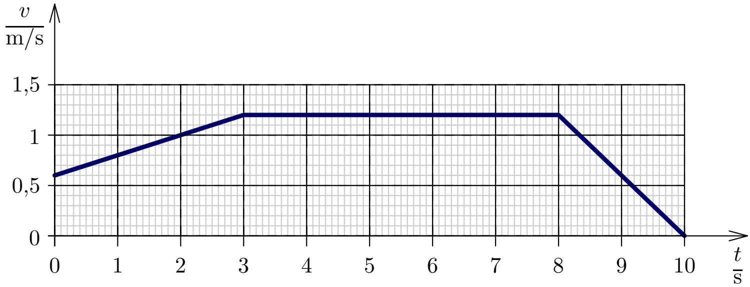
Řešení úloh školního kola 62. ročníku Fyzikální olympiády ve školním roce 2020/2021

Kategorie G – Archimédiáda

Autoři úloh: D. Kaštilová (1), J. Thomas (3–4) a I. Volf (2, 5).

FO62G1-1: Na skateboardu



Obr. 1: K řešení úlohy FO62G1-1

a) Graf je na obr. 1. **2 body**

b) Označme $t_1 = 3\,\mathrm{s}$, $t_2 = 5\,\mathrm{s}$, $t_3 = 2\,\mathrm{s}$, $v_1 = (v_0 + 3 \cdot 0{,}2)\,\mathrm{m/s} = 1{,}2\,\mathrm{m/s}$.
Lucka se při rovnoměrném pohybu pohybovala rychlostí 1,2 m/s. **2 body**

c) $s_2 = v_1 t_2 = (1{,}2 \cdot 5)\,\mathrm{m} = 6{,}0\,\mathrm{m}$. Číselně je dráha rovna obsahu plochy pod grafem rychlosti v čase od 3. do 8. sekundy. Při rovnoměrném pohybu ujela Lucka dráhu 6 m. **1 bod**

d) Číselně je dráha s_1 při zrychleném pohybu rovna obsahu plochy trojúhelníku a obdélníku pod grafem rychlosti v prvních třech sekundách a při zpomaleném pohybu je dráha s_3 číselně rovna obsahu plochy pod grafem rychlosti v posledních dvou sekundách.

$$s_1 = \frac{1}{2}(v_1 - v_0)\,t_1 + v_0 t_1 = \frac{v_1 + v_0}{2} t_1 = \frac{1{,}2\,\mathrm{m/s} + 0{,}6\,\mathrm{m/s}}{2} \cdot 3\,\mathrm{s} = 2{,}7\,\mathrm{m},$$

$$s_3 = \frac{1}{2} v_1 t_3 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}2\,\mathrm{m/s} \cdot 2\,\mathrm{s} = 1{,}2\,\mathrm{m}.$$

Při zrychleném pohybu urazila dráhu 2,7 m, při zpomaleném 1,2 m. **3 body**

e) $v_\mathrm{p} = \dfrac{s_\mathrm{c}}{t_\mathrm{c}}$, kde s_c je celková dráha a t_c je celková doba pohybu.

$$s_\mathrm{c} = s_1 + s_2 + s_3 = 2{,}7\,\mathrm{m} + 6{,}0\,\mathrm{m} + 1{,}2\,\mathrm{m} = 9{,}9\,\mathrm{m}, \quad t_\mathrm{c} = 10\,\mathrm{s}, \quad v_\mathrm{p} = \frac{9{,}9}{10}\,\mathrm{m/s} = 0{,}99\,\mathrm{m/s}.$$

Průměrná rychlost Lucky byla 0,99 m/s. **2 body**

FO62G1-2: Cyklista Petr

a) Máme zadaný obvod o kola s pláštěm, průměr d vypočítáme ze vztahu

$$d = \frac{o}{\pi} \doteq \frac{220\,\mathrm{cm}}{3{,}141\,6} \doteq 70{,}028\,\mathrm{cm} \doteq 700\,\mathrm{mm}.$$

Z převodního vztahu 1 palec = 2,54 cm pak vychází

$$d = \frac{70{,}028\,\mathrm{cm}}{2{,}54\,\mathrm{cm/palec}} \doteq 27{,}570\,\text{palců} \doteq 28\,\text{palců}.$$ **2 body**

Palce a mm se doposud na pláštích uvádějí.

b) Při jedné otáčce pedálů se zadní kolo otočí $n_1/n_2 = 54/18 = 3\times$, cyklista tak ujede vzdálenost $s_1 = 3l = 3 \cdot 220\,\mathrm{cm} = 660\,\mathrm{cm} = 6{,}6\,\mathrm{m}$. Za minutu se levý pedál otočí 40krát, cyklista ujede $s_2 = 40s_1 = 40 \cdot 6{,}60\,\mathrm{m} = 264\,\mathrm{m}$. To odpovídá rychlosti

$$v_1 = 264\,\mathrm{m/min} = 4{,}4\,\mathrm{m/s} = 15{,}84\,\mathrm{km/h} \doteq 16\,\mathrm{km/h}.$$ **4 body**

c) Podobně jako v předchozí části pro rychlost $v = 30\,\mathrm{km/h} \doteq 8{,}333\,3\,\mathrm{m/s}$, musí šlapat s minutovou frekvencí

$$f = \frac{v}{s_1} \cdot 60\,\mathrm{s} = \frac{8{,}333\,3\,\mathrm{m/s}}{6{,}6\,\mathrm{m}} \cdot 60\,\mathrm{s} \doteq 75{,}758 \doteq 76.$$ **3 body**

d) Všichni máme zkušenost, že pohybující se tělesa a objekty setrvávají v pohybu, což nazýváme setrvačností. Chceme-li zastavit, musíme proti pohybu působit silou, na kole např. stisknutím brzdy. Proti pohybu působí také odpor vzduchu nebo tření. **1 bod**

FO62G1-3: Trénink chodců

a) Pokud se setkají, musel Slávek ujít o vzdálenost jednoho oválu navíc. Na to, aby Bedřich ušel vzdálenost $l_1 = 1\,000\,\mathrm{m}$ při délce kroku $d_1 = 0{,}5\,\mathrm{m}$, musí udělat $n_1 = l_1/d_1 = 1\,000\,\mathrm{m}/0{,}5\,\mathrm{m} = 2000$ kroků. Když udělá stejný počet $n_1 = 2000$ kroků Slávek při délce kroku $d_2 = 0{,}7\,\mathrm{m}$, ujde vzdálenost $l_2 = n_1 d_2 = 2000 \cdot 0{,}7\,\mathrm{m} = 1\,400\,\mathrm{m}$. Ovál na stadionu má tedy délku $o = l_2 - l_1 = 1\,400\,\mathrm{m} - 1\,000\,\mathrm{m} = 400\,\mathrm{m}$. **3 body**

b) Oba chodci udělají stejný počet kroků n a součet vzdáleností, které ujdou, musí být roven délce oválu o, takže

$$nd_1 + nd_2 = o, \qquad n \cdot 0{,}7\,\mathrm{m} + n \cdot 0{,}5\,\mathrm{m} = 400\,\mathrm{m}.$$

Odtud pak vychází

$$n = \frac{o}{d_1 + d_2} = \frac{400\,\mathrm{m}}{0{,}7\,\mathrm{m} + 0{,}5\,\mathrm{m}} \doteq 333{,}33 \doteq 333\,\text{kroků (nebo také } 333\,\frac{1}{3}).$$

Bedřich tedy ujde $l_1' = nd_1 = 333{,}33 \cdot 0{,}5\,\mathrm{m} \doteq 166{,}67\,\mathrm{m} \doteq 170\,\mathrm{m}$, Slávek $l_2' = nd_2 = 333{,}33 \cdot 0{,}7\,\mathrm{m} \doteq 233{,}33\,\mathrm{m} \doteq 230\,\mathrm{m}$. **3 body**

c) Na vzdálenosti $l_3 = 20\,\mathrm{km}$ musí Slávek udělat

$$n_3 = \frac{l_3}{d_2} = \frac{20\,000\,\mathrm{m}}{0{,}7\,\mathrm{m}} \doteq 28\,571\,\text{kroků},$$

Bedřich zatím ujde vzdálenost $l_4 = n_3 d_1 = 28\,571 \cdot 0{,}5\,\mathrm{m} \doteq 14\,286\,\mathrm{m}$. Slávek vyhraje o $l_3 - l_4 = 20\,000\,\mathrm{m} - 14\,286\,\mathrm{m} = 5\,714\,\mathrm{m} \doteq 5\,700\,\mathrm{m}$. **2 body**

d) Za čas $t = 1\,\mathrm{h}\,16\,\mathrm{min}\,36\,\mathrm{s} = 4\,596\,\mathrm{s}$ by musel při světovém rekordu Slávek ujít $l_3 = 20\,000\,\mathrm{m}$, za sekundu pak vzdálenost

$$L = \frac{l_3}{t} = \frac{20\,000\,\mathrm{m}}{4\,596\,\mathrm{s}} \doteq 4{,}351\,6\,\mathrm{m} \doteq 4{,}4\,\mathrm{m},$$

musel by tedy udělat každou sekundu

$$n_3 = \frac{L}{d_2} = \frac{4{,}351\,6\,\mathrm{m}}{0{,}7\,\mathrm{m}} \doteq 6{,}216\,6\,\text{kroků} \doteq 6{,}2\,\text{kroků},$$

tedy více než 6 kroků. Bedřich by musel udělat za sekundu

$$n_4 = \frac{L}{d_1} = \frac{4{,}351\,6\,\mathrm{m}}{0{,}5\,\mathrm{m}} \doteq 8{,}703\,2\,\text{kroků} \doteq 8{,}7\,\text{kroků},$$

tedy téměř 9 kroků. **2 body**

FO62G1-4: Zatížení střechy

a) Plocha střechy $S = 15\,\mathrm{m} \times 8\,\mathrm{m} = 120\,\mathrm{m}^2$, objem vrstvy ulehlého sněhu o výšce $h_1 = 20\,\mathrm{cm} = 0{,}2\,\mathrm{m}$ vychází $V_1 = Sh_1 = 120\,\mathrm{m}^2 \cdot 0{,}2\,\mathrm{m} = 24\,\mathrm{m}^3$ (její hmotnost při hustotě $\varrho_1 = 0{,}2\,\mathrm{g/cm^3} = 200\,\mathrm{kg/m^3}$ pak bude $V\varrho_1 = Sh_1\varrho_1 = 120\,\mathrm{m}^2 \cdot 0{,}2\,\mathrm{m} \cdot 200\,\mathrm{kg/m^3} = 4\,800\,\mathrm{kg}$, údaj ale není nutné k určení tlaku počítat). Pro tlak, kterým působí tíha sněhu na střechu, dostáváme

$$p = \frac{V\varrho_1 g}{S} = \frac{Sh_1\varrho_1 g}{S} = h_1\varrho_1 g = 0{,}2\,\mathrm{m} \cdot 200\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} = 392\,\mathrm{Pa} \doteq 390\,\mathrm{Pa}.$$

4 body

b) Před začátkem sněžení ležel na každém metru čtverečném střechy sníh o hmotnosti $m_1 = S_1h_1\varrho_1 = 1\,\mathrm{m}^2 \cdot 0{,}2\,\mathrm{m} \cdot 200\,\mathrm{kg/m^3} = 40\,\mathrm{kg}$. Do kritické hmotnosti $m = 120\,\mathrm{kg}$ by muselo na každý metr čtverečný střechy napadnout $m_2 = m - m_1 = 120\,\mathrm{kg} - 40\,\mathrm{kg} = 80\,\mathrm{kg}$. **2 body**

Za hodinu napadne vrstva čerstvého sněhu o výšce $h_2 = 5\,\mathrm{cm} = 0{,}05\,\mathrm{m}$ a hustotě $\varrho_2 = 0{,}1\,\mathrm{g/cm^3} = 100\,\mathrm{kg/m^3}$, tj. o hmotnosti $m_3 = S_1h_2\varrho_2 = 1\,\mathrm{m}^2 \cdot 0{,}05\,\mathrm{m} \cdot 100\,\mathrm{kg/m^3} = 5\,\mathrm{kg}$, kritického zatížení bychom dosáhli za

$$\frac{m_2}{m_3} = \frac{80\,\mathrm{kg}}{5\,\mathrm{kg}} = 16$$

hodin po začátku sněžení. **2 body**

Taková situace by nastala v čase $8\,\mathrm{h} + 16\,\mathrm{h} = 24\,\mathrm{h}$, tedy o půlnoci. **2 body**

Poznámka: Maximální zatížení střechy sněhem se liší podle oblastí (obecně jsou střechy v horských oblastech stavěny pro větší zátěž) a je popsáno ČSN 730035/Z3 (11/2006); více podrobností včetně mapy sněhových oblastí ČR lze nalézt např. na `http://www.snihnastrese.cz/normove-zatizeni-snehovych-oblasti/`.