Řešení úloh 1. kola 63. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Úlohy navrhli: J. Thomas (1, 2, 7), F. Studnička (3, 4, 5) a J. Kříž (6)

1. a) Protože u prázdné nádoby je $x = 0$, je výška těžiště prázdné nádoby $h_1 = 0{,}10$ m. Z grafu vyplývá, že ve stejné výšce bude těžiště, když bude voda sahat do maximální výšky

$$x = 2h_1 = 0{,}20 \text{ m.}$$ **2 body**

b) Sahá-li voda do výšky x, je její hmotnost ve válci $m_2 = \rho V = \rho\pi r^2 x$ a její těžiště je ve výšce $\frac{x}{2}$. Výška těžiště nad podstavou je

$$h(x) = \frac{m_1 h_1 + \rho\pi r^2 x \frac{x}{2}}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1 h_1 + \rho\pi r^2 x^2}{2\left(m_1 + \rho\pi r^2 x\right)}. \tag{1}$$

Z rovnice vyjádříme hmotnost nádoby

$$m_1 = \frac{2h - x}{2\left(h_1 - h\right)} \rho\pi r^2 x.$$

Z grafu odečteme souřadnice h a x několika bodů v metrech, např. (0,03;0,06), (0,055;0,055) nebo (0,09;0,06). Těmto bodům odpovídají hodnoty 0,265 kg, 0,264 kg a 0,265 kg. Zaokrouhlením na dvě desetinná místa pak $m_1 = 0{,}26$ kg. **2 body**

c) Hledáme minimum funkce (1). Její derivaci položíme rovnou nule:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \frac{4\rho\pi r^2 x\left(m_1 + \rho\pi r^2 x\right) - 2\rho\pi r^2\left(2m_1 h_1 + \rho\pi r^2 x^2\right)}{4\left(m_1 + \rho\pi r^2 x\right)^2} = 0,$$

$$4\rho\pi r^2 x_1\left(m_1 + \rho\pi r^2 x_1\right) = 2\rho\pi r^2\left(2m_1 h_1 + \rho\pi r^2 x_1^2\right),$$

$$2x_1\left(m_1 + \rho\pi r^2 x_1\right) = 2m_1 h_1 + \rho\pi r^2 x_1^2.$$

Odtud $\rho\pi r^2 x_1^2 + 2m_1 x_1 - 2m_1 h_1 = 0$.
Řešením rovnice dostaneme

$$x_1 = \frac{-2m_1 + \sqrt{4m_1^2 + 8\rho\pi r^2 m_1 h_1}}{2\rho\pi r^2} = 0{,}055 \text{ m}$$ **2 body**

d) Protože je $d \ll r$, můžeme pro hmotnost dna nádoby napsat $m_3 = \rho_1\pi r^2 d$ a pro hmotnost pláště válce $m_4 = \rho_1 2\pi r d H$. Těžiště nádoby je ve výšce h_1, pro kterou platí

$$h_1 = \frac{m_3 \cdot 0 + m_4 \frac{H}{2}}{m_3 + m_4} = \frac{\rho_1 2\pi r d H \frac{H}{2}}{\rho_1\pi r^2 d + \rho_1 2\pi r d H} = \frac{H^2}{r + 2H}.$$

Dostáváme kvadratickou rovnici s neznámou H:

$$H^2 - 2h_1 H - h_1 r = 0, \quad \text{odkud} \quad H = h_1\left(1 + \sqrt{1 + \frac{r}{h_1}}\right) = 21 \text{ cm.}$$

2 body

Nyní můžeme určit tloušťku stěn nádoby. Protože

$$m_1 = m_3 + m_4 = \rho_1\pi r^2 d + \rho_1 2\pi r d H = \rho_1\pi r d(r + 2H),$$

bude $d = \dfrac{m_1}{\rho_1\pi r(r + 2H)} = \dfrac{m_1}{\rho_1\pi r\left(r + 2h_1\left(1 + \sqrt{1 + \frac{r}{h_1}}\right)\right)} = 1{,}1$ mm. **2 body**

2.a) Při izobarickém ději plyn přijme teplo $Q = \frac{7}{2}nR\left(T_2 - T_1\right)$. V bodech 1 a 2 podle stavové rovnice platí $p_1V_1 = nRT_1$ a $p_1V_2 = nRT_2$. Dosazením dostaneme

$$Q = \frac{7}{2}p_1\left(V_2 - V_1\right). \tag{1}$$

Při ději 3–1 platí

$$p_3V_2 = p_1V_1. \tag{2}$$

Ve vztazích (1) a (2) jsou neznámými p_1 a V_2. Dosazením $p_1 = \dfrac{p_3V_2}{V_1}$ do vztahu (2) dostaneme

$$Q = \frac{7}{2}\frac{p_3V_2}{V_1}\left(V_2 - V_1\right),$$

$$V_2^2 - V_1V_2 - \frac{2QV_1}{7p_3} = 0.$$

Řešením kvadratické rovnice

$$V_2 = \frac{V_1}{2} + \sqrt{\frac{V_1^2}{4} + \frac{2QV_1}{7p_3}} = \frac{V_1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8Q}{7p_3V_1}}\right) = 1{,}9\ \text{l}.$$

Z rovnice (2) pak vyjádříme p_1:

$$p_1 = \frac{p_3V_2}{V_1} = \frac{p_3}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8Q}{7p_3V_1}}\right) = 3{,}92 \cdot 10^5\ \text{Pa}.$$

4 body

b), c) Pro výpočet účinnosti musíme znát také teplo, které plyn odevzdá při izochorickém ději 2–3, a rovněž teplo, které musíme odebrat při izotermické kompresi 3–1. Pro zjednodušení zápisu označme $1 + \frac{8Q}{7p_3V_1} = k$.
Při izochorickém ději 2 – 3 plyn odevzdá teplo:

$$Q'_{23} = \Delta U = \frac{5}{2}nR\left(T_2 - T_1\right) = \frac{5}{2}\left(p_1 - p_3\right)V_2 = \frac{5}{2}\left(\frac{p_3V_2}{V_1} - p_3\right)V_2 =$$

$$= \frac{5}{2}p_3\left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right)V_2 = \frac{5}{2}p_3\left[\frac{\frac{V_1}{2}\left(1 + \sqrt{k}\right)}{V_1} - 1\right]\frac{V_1}{2}\left(1 + \sqrt{k}\right) =$$

$$= \frac{5}{4}p_3V_1\left(\frac{1 + \sqrt{k}}{2} - 1\right)\left(1 + \sqrt{k}\right) = 1{,}43\ \text{kJ}.$$

Při izotermickém ději 3–1 plyn odevzdá teplo

$$Q'_{31} = p_3V_2 \ln\frac{V_2}{V_1} = p_3\frac{V_1}{2}\left(1 + \sqrt{k}\right)\ln\frac{\left(1 + \sqrt{k}\right)}{2} = 0{,}27\ \text{kJ}.$$

4 body

Účinnost tepelného stroje

$$\eta = \frac{Q - Q'_{31} - Q'_{23}}{Q} =$$

$$= \frac{Q - p_3\frac{V_1}{2}\left(1 + \sqrt{k}\right)\ln\frac{\left(1+\sqrt{k}\right)}{2} - \frac{5}{4}p_3V_1\left(\frac{1+\sqrt{k}}{2} - 1\right)\left(1 + \sqrt{k}\right)}{Q} = 0{,}15.$$

2 body

3.a) Všechny náboje na prstenci jsou ve stejné vzdálenosti od bodu P, a sice

$$l = \sqrt{R^2 + z^2}.$$

Není tedy zapotřebí integrace, podle principu superpozice bude pro potenciál platit

$$\varphi = \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$ **2 body**

b) Vzhledem k symetrii bude intenzita orientována ve směru osy prstence kolmé k prstenci. Její velikost získáme derivací potenciálu:

$$E = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z} = \frac{kQz}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$ **2 body**

c) Pro $|z| \ll R$ můžeme použít aproximaci

$$(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \cong R^3.$$

Pak pro intenzitu dostaneme

$$E \cong \frac{kQz}{R^3}.$$ **2 body**

Protože elektrická intenzita je definována jako $\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{-e}$, můžeme sílu vyjádřit jako

$$F = \frac{kQze}{R^3}.$$

d) Podle druhého Newtonova zákona můžeme zapsat

$$m\ddot{z} = -\frac{kQe}{R^3}z. \tag{1}$$

Rovnici (1) buď porovnáme s obecnou rovnicí kmitavého pohybu $\ddot{\psi} + \omega^2\psi = 0$ a vyjádříme úhlovou frekvenci kmitavého pohybu, nebo zapíšeme $\ddot{z} = -\omega^2 z$ a dostaneme

$$m\omega^2 z = \frac{kQe}{R^3}z \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{kQe}{mR^3}}.$$

Pro frekvenci kmitavého pohybu elektronu pak obdržíme

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R}\sqrt{\frac{kQe}{mR}} = 5{,}6 \cdot 10^{12}\ \mathrm{Hz}.$$ **3 body**

e) V počátku souřadnic nejsou žádné náboje, proto zde nemohou žádné elektrické siločáry začínat ani končit. Pokud budeme uvažovat malý váleček kolem počátku, siločáry z něj budou vystupovat jeho podstavami (protože je zde elektrické pole s intenzitou $E = \frac{kQz}{R^3}$). Proto musí existovat siločáry, které míří do válečku jeho pláštěm. Pokud bychom na tento myšlený plášť umístili elektron, bude zde působit odpudivá síla a taková poloha elektronu nemůže být stabilní.

Poznámka: Podobnou úvahou lze odvodit, že elektrostatická rovnováha je *vždy* nestabilní. **1 bod**

4. a) Během první srážky můžeme zanedbat vliv pružiny, protože během okamžiku srážky se koule téměř nepohnou (a pružina se téměř nedeformuje). Dvě stejné koule si při dokonale pružné centrální srážce vymění rychlosti. Proto po srážce bude první koule v klidu a druhá získá rychlost v. Proto bude rychlost těžiště činky $\frac{v}{2}$. **1 bod**

b) Po srážce dojde k tomu, že v soustavě souřadnic spojené s těžištěm budou koule tvořící činku kmitat s úhlovou frekvenci

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}},$$

protože střed pružiny je v klidu a polovina pružiny má dvakrát větší tuhost.

2 body

Podle zákona zachování energie může čtvrtá koule získat rychlost v pouze tak, že po proběhlém ději budou všechny ostatní koule v klidu. Proto při srážce třetí a čtvrté koule musí mít třetí koule rychlost v (a druhá koule musí být v klidu). Proto musí být čas pohybu t poločíselným násobkem periody

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}.$$ **3 body**

V této fázi kmitu pružina není deformovaná, takže dráha těžiště je také L. Proto

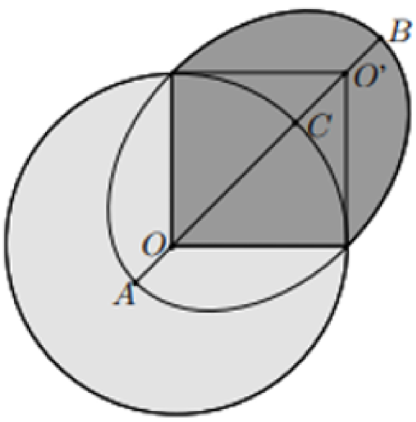
$$\frac{2L}{v} = T\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

a tedy

$$L = \pi v\left(n + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{m}{2k}}.$$ **4 body**

5. a) Celková energie závisí pouze na velikosti hlavní poloosy. Proto je hlavní poloosa stejně dlouhá jako poloměr dráhy při pohybu těsně při povrchu Země: $a = R$.

2 body



Obr. R1

b) Elipsa je definována jako křivka, jejíž body mají stejný součet vzdáleností od ohnisek (který je roven $2a$). Jedno ohnisko leží ve středu Země, druhé ohnisko je proto ve vzdálenosti R jak od místa startu, tak od místa dopadu (viz obr. R1).

Proto bude maximální výška

$$h = |\mathrm{CB}| = |\mathrm{OB}| - R.$$

Proto platí

$$|\mathrm{OB}| = R + \frac{1}{2}|\mathrm{OO}'| = R(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Z poslední rovnice získáme finální výsledek $h = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$. **3 body**

c) Poměr hledané doby letu τ a periody eliptické dráhy je roven poměru dvou ploch: tmavě šedé plochy na obr. R1 a celkové plochy elipsy. Perioda eliptické dráhy při povrchu Země je

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\text{kruhová}}} = \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{GM}{R}}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}},$$

kde jsme v posledním členu využili poznatku, že $g = G\dfrac{M}{R^2}$ je gravitační zrychlení. Plocha tmavě šedé oblasti na obr. R1 je rovna součtu poloviny plochy elipsy a plochy trojúhelníka. Tím dostaneme

$$\tau = T\frac{\frac{\pi}{2}R\frac{R}{\sqrt{2}} + \frac{R^2}{2}}{\pi R\frac{R}{\sqrt{2}}} = (\pi + \sqrt{2})\sqrt{\frac{R}{g}} = 1{,}0 \text{ hodiny}.$$

5 bodů

6. a) Z rukavic nastříháme několik pásků o stejné šířce a co možná největší délce. Na pásky vyznačíme popisovačem dvě rysky dostatečně daleko od okrajů, abychom mohli pásky pevně připevnit k pracovní desce a oblast mezi ryskami toto upevnění neovlivnilo. Pro lepší uchycení je možné pásek podélně srolovat. Změříme délku mezi oběma ryskami l_0. Nyní upevníme pásek k pracovní desce. Podél latexového pásku rozvineme měřicí pásku a upevníme ji k desce pracovního stolu. Postupně natahujeme latexový pásek, dokud se nepřetrhne. Na měřicí pásce odečteme délku l_m těsně před přetržením. Vypočteme maximální relativní prodloužení ε_m. Celý postup opakujeme alespoň třikrát s páskem o stejné šířce, abychom ověřili, že je výsledek opakovatelný. Všechna měření zapíšeme přehledně do tabulky.

b) Z předpokladu o stálém objemu vzorku latexu můžeme psát

$$V = a^2 \cdot k \cdot l = a_0^2 \cdot k \cdot l_0 = a_m^2 \cdot k \cdot l_m,$$

kde $k = d/a$ je podle předpokladu konstantní. Tudíž

$$\sigma = \frac{F}{a^2k} \text{ a } \sigma_p = \frac{F_m}{a_m^2k}.$$

Z předpokladu o stálém objemu máme

$$a^2 = \frac{a_0^2 l_0}{l} \text{ a } a_m^2 = \frac{a_0^2 l_0}{l_m}.$$

Uvažujeme nyní dle zadání působení síly F_m na druhý pásek. U obou pásků se bude lišit konstanta k, u prvního (přetrženého) pásku ji označme k_m, u druhého pásku ponecháme označení k. Píšeme

$$\sigma = \frac{F_m}{k}\frac{l}{l_0}\frac{1}{a_0^2} \text{ a } \sigma_p = \frac{F_m}{k_m}\frac{l_m}{l_0}\frac{1}{a_0^2},$$

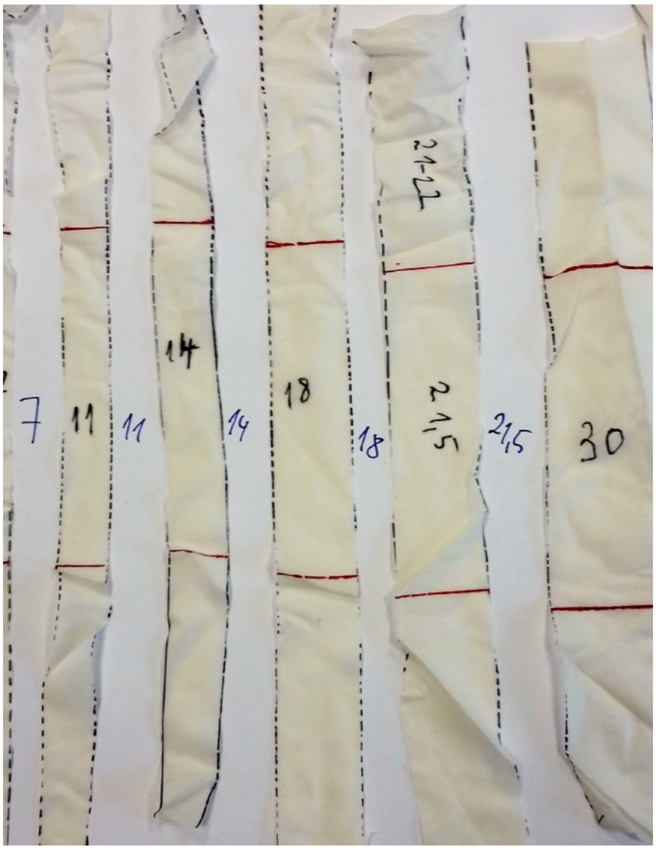
tedy

$$\frac{\sigma}{\sigma_p} = \frac{k_m}{k}\frac{l}{l_m}.$$

Platí také $d_0 = ka_0$ a $d_{m0} = k_m a_0$, z čehož plyne požadovaná rovnost

$$\frac{\sigma}{\sigma_p} = \frac{d_{m0}}{d_0}\frac{l}{l_m}.$$

c) Jeden ze způsobů, jak působit stejnou silou na několik pásků o různé šířce, je spojit pásky za sebou. Vystřihněme z rukavic několik pásků o různé šířce a označíme na nich dvěma ryskami stejnou počáteční délku l_0, viz obrázek R2.

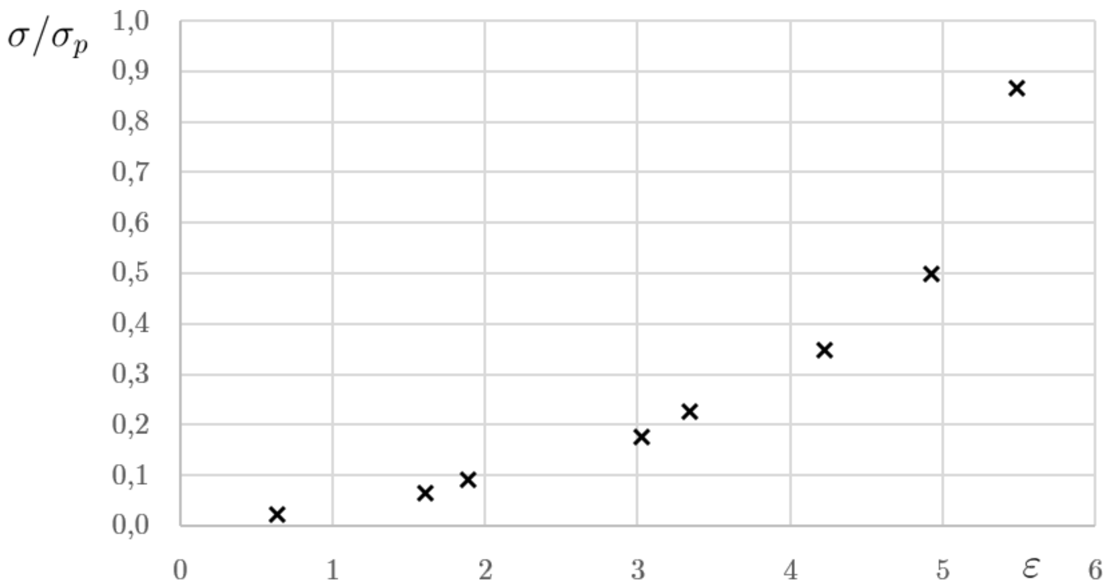


Obr. R2

Zapíšeme do tabulky (viz níže) nedeformovanou šířku každého pásku d_0. Poté podélně srolujme všechny pásky tak, aby se nám dobře napojovaly. Lepicí páskou

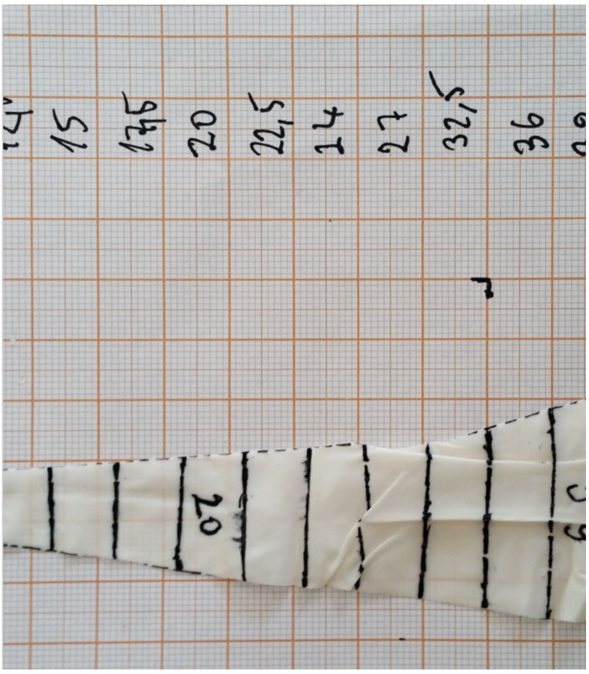
spojíme srolované pásky za sebou. Takto zajistíme stejné silové působení na každý pásek, ale normálové napětí se bude lišit, jelikož je různá počáteční šířka každého pásku. Maximální šířka pásku by měla být alespoň osmkrát větší než šířka minimální.
Doporučujeme udělat dva stejné pásky s minimální šířkou a připevnit je na konec „sériově“ zapojených pásků vedle sebe, tedy do tvaru písmene Y. V momentě, kdy jeden z těchto pásků praskne, použijeme pro měření druhý pásek. K odhadu, kdy dojde k prasknutí, lze využít i výsledku úlohy a). Po prasknutí jednoho z nejužších pásku změříme délky všech slepených pásků. Výsledky zapíšeme do tabulky, vypočteme hodnoty relativní deformace ε a normálového napětí v relativních jednotkách σ/σ_p. Následně sestrojíme graf.
Níže uvádíme příklad měření. K přetržení nejužšího pásku o šířce 7 mm došlo při jeho prodloužení z počátečních 80 mm na 599 mm. Tedy $d_{m0} = 7$ mm a $l_m = 599$ mm.

l_0/mm	l/mm	d_0/mm	ε	σ/σ_p
80	131	71	0,638	0,022
80	208,5	37	1,606	0,066
80	231	30	1,888	0,090
80	322	21,5	3,025	0,175
80	347	18	3,338	0,226
80	418	14	4,225	0,349
80	474	11	4,925	0,505
80	519	7	5,488	0,866



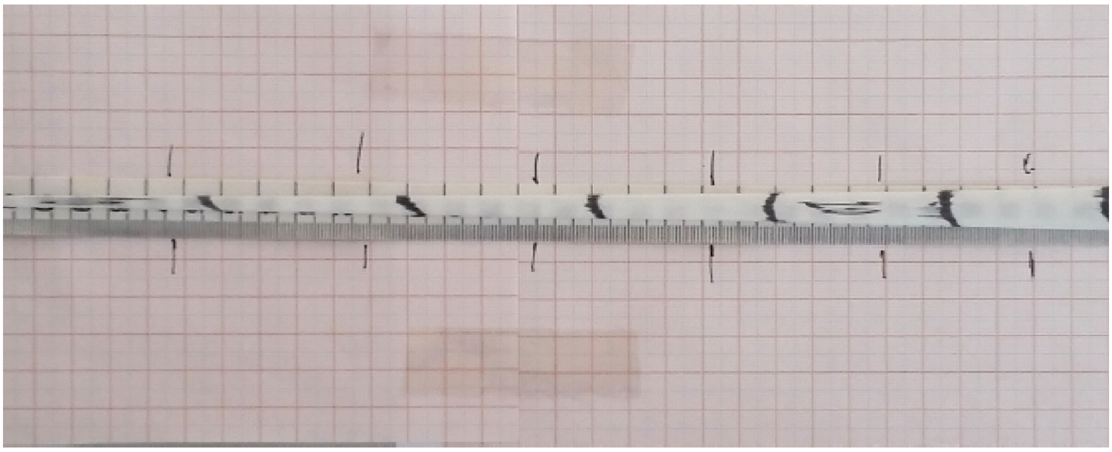
Obr. R3

Alternativně je možné z latexu vystřihnout trojúhelníkový tvar a ryskami na něm vyznačit úseky stejné délky a různé šířky, viz obrázek R4.



Obr. R4

Uvádíme i obrázek tohoto pásku po deformaci.



Obr. R5

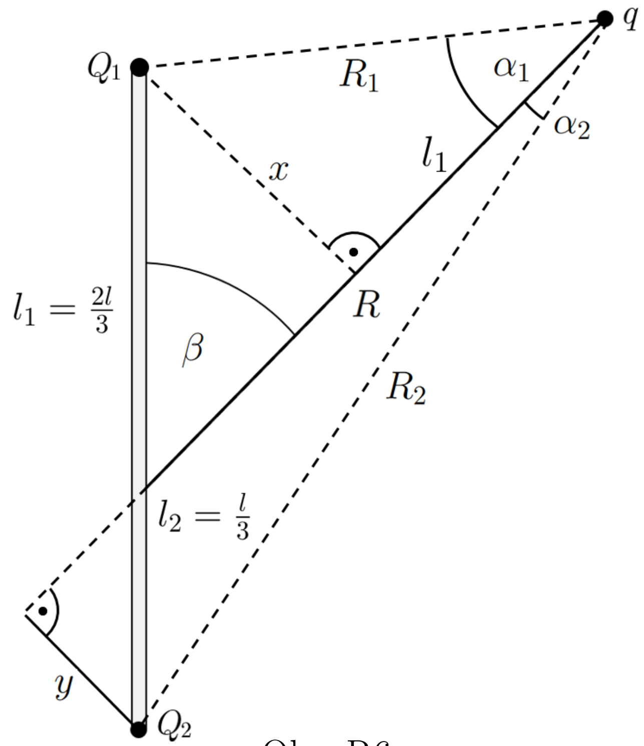
7.a) Označme R_1 a R_2 vzdálenost nábojů Q_1 a Q_2 od náboje q, také $l_2 = l - l_1$ (obr. R6).

Výslednou Coulombovu sílu, působící na náboj q, rozdělíme na složku $F_\parallel$ ve směru nitě a složku $F_\perp$ ve směru kolmém k niti. Zvolíme-li kladnou orientaci ve směru růstu úhlu β, je

$$F_\perp = k\frac{qQ_1 \sin\alpha_1}{R_1^2} - k\frac{qQ_2 \sin\alpha_2}{R_2^2}. \qquad (1)$$

Vzdálenosti R_1 a R_2 vyjádříme z kosinové věty, úhly α_1 a α_2 vyjádříme z pomocných pravoúhlých trojúhelníků:

$$\sin\alpha_1 = \frac{x}{R_1} = \frac{l_1 \sin\beta}{R_1}, \ \sin\alpha_2 = \frac{y}{R_2} = \frac{l_2 \sin\beta}{R_2}.$$



Obr. R6

Po dosazení do (1) obdržíme

$$F_\perp = kq\left[\frac{Q_1 l_1}{(R^2 + l_1^2 - 2Rl_1\cos\beta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{Q_2 l_2}{(R^2 + l_2^2 + 2Rl_2\cos\beta)^{\frac{3}{2}}}\right]\sin\beta. \qquad (2)$$

V rovnováze $F_\perp = 0$. Pro $0 < \beta < 180°$ dostáváme z této podmínky

$$Q_1 = Q_2\frac{l_2}{l_1}\left(\frac{R^2 + l_1^2 - 2Rl_1\cos\beta}{R^2 + l_2^2 + 2Rl_2\cos\beta}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

5 bodů

b) Výraz v hranaté závorce ve vztahu (2) pro sílu $F_\perp$ označme

$$G(\beta) = \frac{Q_1 l_1}{(R^2 + l_1^2 - 2Rl_1\cos\beta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{Q_2 l_2}{(R^2 + l_2^2 + 2Rl_2\cos\beta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Tato funkce je v celém intervalu $\langle 0°, 180°\rangle$ klesající. Proto rovnovážná poloha niti, pro níž $G(\beta) = 0$, je současně polohou stabilní – síla $F_\perp$ směřuje proti výchylce z této polohy. Z nerovností $G(180°) < G(\beta) < G(0°)$, tj. z nerovností

$$\frac{Q_1 l_1}{(R + l_1)^3} - \frac{Q_2 l_2}{(R - l_2)^3} < 0 < \frac{Q_1 l_1}{(R - l_1)^3} - \frac{Q_2 l_2}{(R + l_2)^3}$$

(předpokládáme $R > \max(l_1, l_2)$), dostáváme pro náboj Q_1 možný interval hodnot

$$Q_{\min} = Q_2\frac{l_2}{l_1}\left(\frac{R - l_1}{R + l_2}\right)^3 < Q_1 < Q_2\frac{l_2}{l_1}\left(\frac{R + l_1}{R - l_2}\right)^3 = Q_{\max}.$$

Pro $Q_1 \leq Q_{\min}$ je rovnovážná poloha $0°$, pro $Q_1 \geq Q_{\max}$ $180°$. Pro zadané hodnoty

$$Q_{\min} = \frac{1}{128}Q_2,\; Q_{\max} = \frac{125}{16}Q_2.$$

5 bodů