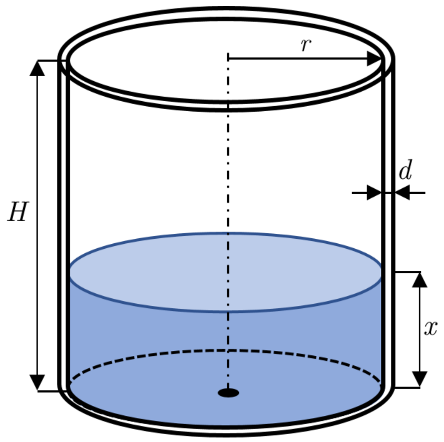
Zadání úloh 1. kola 63. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

1. Válec s vodou

Nádoba tvaru tenkostěnného válce o poloměru $r = 5{,}0$ cm je do určité výšky h_0 naplněna vodou. Hustota vody $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Malým otvorem uprostřed dna nádoby voda pomalu vytéká, dokud nádoba není prázdná. Během vytékání vody se výška těžiště nádoby s vodou h nad základnou mění v závislosti na výšce hladiny vody x nad základnou. Tato závislost je zaznamenána v grafu na obr. 2. Tloušťka stěn nádoby je d ($d \ll r$) a je stejná jako tloušťka jejího dna. Nádoba je vyrobena z materiálu o hustotě $\rho_1 = 3{,}0 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.



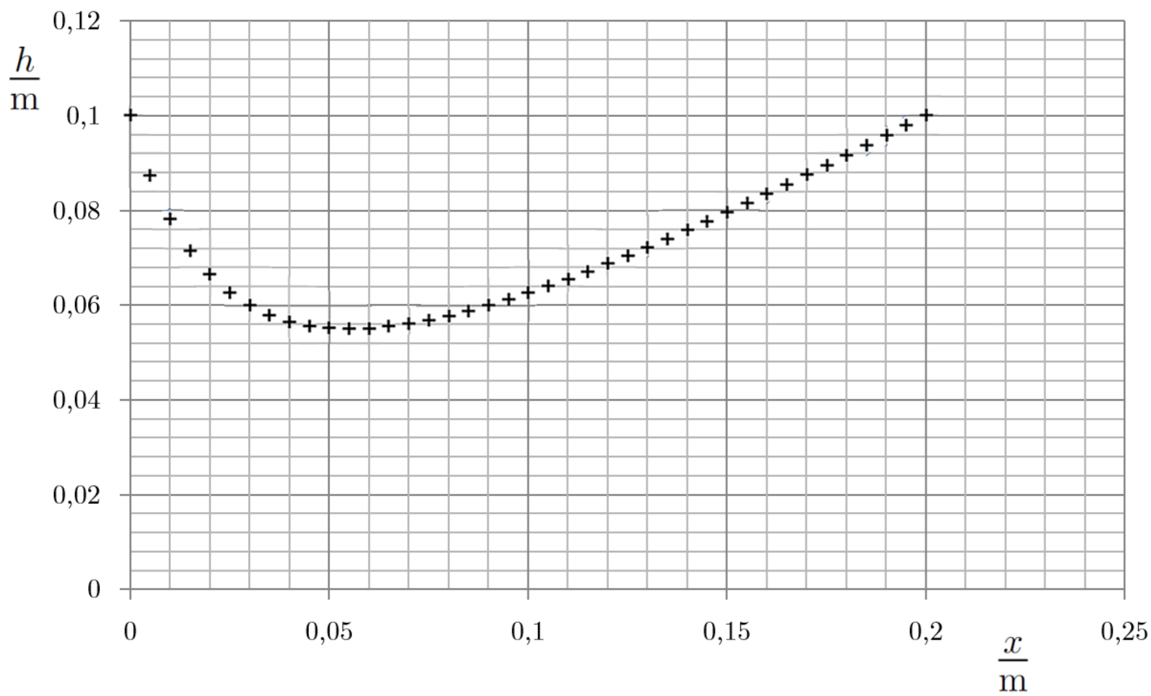
Obr. 1

a) Pomocí grafu určete počáteční výšku h_0 a výšku h_1, ve které se nachází těžiště prázdné nádoby.

b) Napište závislost výšky těžiště nade dnem nádoby $h(x)$. Užitím této závislosti a pomocí grafu zjistěte hmotnost prázdné nádoby m_1. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

c) Určete výpočtem výšku hladiny vody x_1, při které je těžiště nádoby s vodou nejníže. Hodnoty m_1 a h_1 považujte za známé.

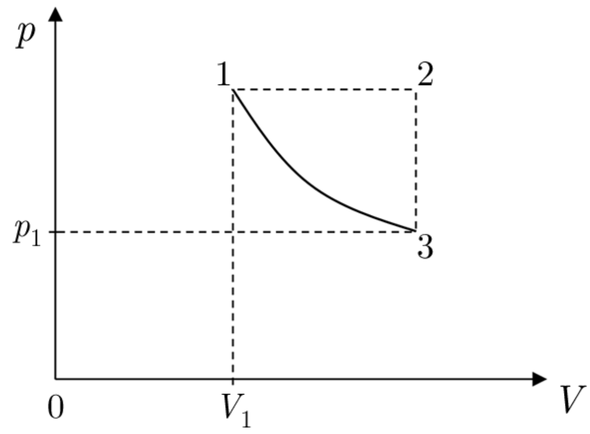
d) Užitím získaných výsledků m_1 a h_1 určete výšku nádoby H a tloušťku jejích stěn d.



Obr. 2

2. Kruhový děj

Určité množství ideálního dvouatomového plynu prochází kruhovým dějem 1–2–3–1, který je znázorněn v pV-diagramu. Děj 3–1 je izotermický, známe veličiny p_3 a V_1. V části děje 1–2 bylo plynu dodáno teplo Q.



Obr. 3

a) Určete tlak a objem plynu v ostatních bodech kruhového děje.
b) Určete teplo vyměněné s okolím ve zbylých částech kruhového děje.
c) Jaká by byla účinnost tepelného stroje, který by pracoval podle tohoto kruhového děje?

Části a) a b) řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty: $Q = 2{,}0$ kJ, $p_3 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Pa, $V_1 = 0{,}5$ l. Vnitřní energie ideálního plynu s dvouatomovými molekulami $U = \frac{5}{2}nRT$.

3. Nanohodiny

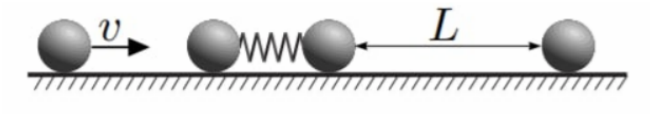
Nanotechnologie umožňují výrobu velice malých struktur. Uvažujme malý tenký prstenec o poloměru R, který je rovnoměrně nabitý kladným nábojem Q.

a) Určete elektrický potenciál φ v bodě P ležícím na ose prstence ve vzdálenosti z od jeho středu.
b) Určete intenzitu elektrického pole $\boldsymbol{E}$ v bodě P.
c) Ukažte, že síla působící na elektron pohybující se se podél osy symetrie v blízkosti středu prstence ($|z| \ll R$) je harmonická (tj. závisí na z přímo úměrně).
d) Určete frekvenci kmitání takového elektronu. Použijte číselné hodnoty $R = 1{,}0$ μm a $Q = 1{,}0 \cdot 10^{-13}$ C.
e) Uvažujme nyní, že elektron se může pohybovat i mimo osu symetrie prstence. Je poloha ve středu prstence (na ose, tj. pro $z = 0$) stabilní nebo nestabilní? Zdůvodněte svoji odpověď.

Může se vám hodit následující vztah: $(1 + x)^\alpha \cong 1 + \alpha x + \dfrac{1}{2}\alpha(\alpha - 1)x^2$.

4. Činka

Dvě stejné dokonale pružné koule o hmotnosti m jsou spojeny pružinou o tuhosti k, čímž vytvoří činku. Tato činka leží v klidu na hladké vodorovné podlaze (zanedbejte veškeré tření). Třetí koule (stejná jako předchozí dvě) narazí do činky z levé strany rychlostí v (viz obr. 4). Čtvrtá koule (stejná jako předchozí) leží napravo od činky.



Obr. 4

a) Jaká je rychlost těžiště činky poté, co je zasažena koulí putující zleva?
b) Při jaké vzdálenosti L mezi činkou a koulí napravo bude výsledná rychlost pravé koule stejná, jako počáteční rychlost v koule, která narazila zleva?

5. Balistická raketa

Raketa je vystřelena z pólu nerotující planety Země první kosmickou rychlostí a dopadne na rovník. Poloměr Země uvažujte $R = 6\,400$ km.

a) Určete velikost hlavní poloosy a dráhy rakety.
b) Jaká je maximální výška h rakety během jejího letu nad povrchem Země?
c) Jaká je doba letu τ rakety?

Poznámka: Mechanická energie tělesa obíhajícího kolem Země je $E = -\frac{GMm}{2a}$, kde G je gravitační konstanta, M hmotnost Země, m hmotnost tělesa a a velikost hlavní poloosy oběžné dráhy (nulová potenciální energie odpovídá letu do nekonečna). Obsah elipsy je $S = \pi ab$, kde b je velikost vedlejší poloosy. Předpokládejte, že $R > \max(a, b)$.

6. Latexová rukavice

Latex je vysoce pružný elastický materiál, u kterého lze předpokládat, že jeho objem zůstává při protahování konstantní prakticky až do jeho přetržení.

Pomůcky: Alespoň tři páry bezbarvých lékařských latexových rukavic; pevná průhledná lepicí páska; nůžky; alespoň čtyři listy milimetrového papíry formátu A4 nebo většího; tři pravítka; měřicí páska (minimálně 1 m); permanentní značkovač s co možná nejmenším hrotem.

Gumové rukavice můžete stříhat na kusy dle libosti. Kousky rukavic lepte buďto přímo na pracovní stůl pomocí lepicí pásky nebo k připevnění použijte pravítko. Ke každé úloze načrtněte vaši experimentální aparaturu a podrobně popište pracovní postup. Výsledky měření zapisujte do tabulek.

a) Určete maximální relativní prodloužení ε_m pásku latexového filmu, tedy relativní prodloužení odpovídající mezi pevnosti latexu. Relativní prodloužení je definováno jako $\varepsilon = (l - l_0)/l_0$, kde l_0 je délka nedeformovaného pásku a l délka deformovaného pásku. Měření proveďte alespoň třikrát a diskutujte výsledky.
b) Předpokládáme, že objem latexu se v deformovaném stavu nemění a také, že působící síla ovlivňuje změny v příčném směru stejným způsobem. Předpokládejme také konstantní tloušťku pásku. Tedy, označíme-li tloušťku latexového filmu a a šířku pásku d, platí $d/a = d_0/a_0$, kde a_0 je tloušťka v nedeformovaném stavu

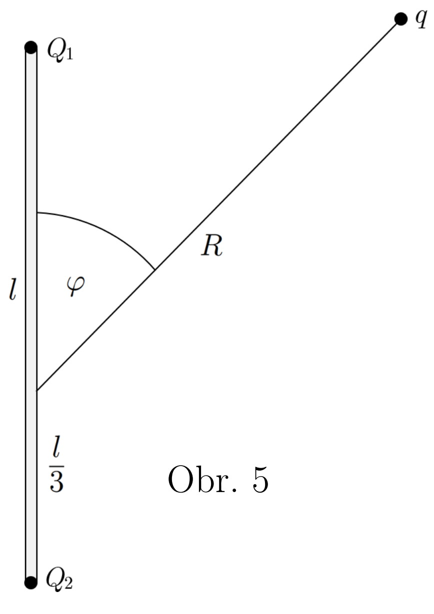
a d_0 je šířka pásku v nedeformovaném stavu. Uvažujme nyní latexový pásek o šířce d_{m0} a délce l_0 v nedeformovaném stavu. Sílu, která pásek přetrhne, označíme F_m, délka pásku při přetržení je l_m. Normálové napětí σ je dle definice číselně rovno napínací síle působící na jednotku plochy průřezu deformovaného pásku, tedy obecně $\sigma = F/ad$. Tzv. mez pevnosti σ_p je normálové napětí nutné k přetržení pásku, v našem případě $\sigma_p = F_m/a_m d_m$. Mějme nyní druhý pásek se šířkou d_0, $d_0 > d_{m0}$, a stejnou délkou l_0 v nedeformovaném stavu. Působíme-li na pásek výše zmíněnou silou F_m, pásek se prodlouží na délku l. Ukažte, že platí

$$\frac{\sigma}{\sigma_p} = \frac{d_{m0}}{d_0}\frac{l}{l_m}.$$

c) Navrhněte způsob, jak zajistit stejné silové působení na pásky latexu o stejné délce a různé šířce. Změřte a vyneste do grafu deformační křivku latexu, tj. závislost normálového napětí σ na relativním prodloužení. Normálové napětí měřte v relativních jednotkách, normalizujte je na napětí, které způsobí přetržení pásku (mez pevnosti σ_p).

7. Měření náboje

Na koncích nevodivé tyče o délce l jsou umístěny dvě nabité kuličky (obr. 5). Náboj Q_2 spodní kuličky je známý, náboj Q_1 horní kuličky neznáme.



Obr. 5

Ve vzdálenosti l_1 od náboje Q_1 je k nevodivé tyči pomocí nevodivé nitě o délce R připevněna třetí kulička o zanedbatelné tíze, nesoucí náboj q. Všechny náboje mají stejná znaménka.

a) Určete velikost náboje Q_1, je-li úhel, který svírá nit s tyčí, roven β.

b) Jaký největší náboj $Q_{\max}$ a nejmenší náboj $Q_{\min}$ můžeme popsaným zařízením naměřit, bude-li $l_1 = \frac{2l}{3}$ a $R = l$?