Řešení úloh celostátního kola 63. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie A

Úlohy navrhli: J. Jírů (2) a F. Studnička (1, 3, 4)

1. a) Při zanedbání lomu světla se sbíhají paprsky pod stejným úhlem, pod jakým vidíme Slunce, tedy 2δ, tedy:

$$L_1 = \frac{R}{\delta} \approx 1{,}4 \cdot 10^6 \text{ km.}$$

S použitím druhého Newtonova zákona na oběžnou dráhu Měsíce o poloměru R_0 s úhlovou frekvencí ω_0 získáme:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{GM}{R_0^3}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R_0^3}},$$

tedy:

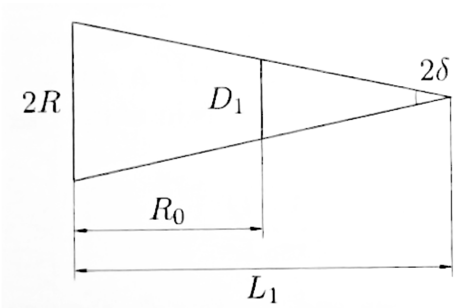
$$R_0 = \left(\frac{gT_0^2R^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 384 \cdot 10^3 \text{ km,}$$

díky čemuž určíme průměr Měsíce

$$D = 2\delta R_0 = 3{,}45 \cdot 10^3 \text{ km}$$

a průměr stínu ve vzdálenosti Měsíce (viz obr. R1)

$$D_1 = 2R\left(1 - \frac{R_0}{L_1}\right) \approx 9{,}3 \cdot 10^3 \text{ km}$$



Obr. R1

Celková doba zatmění Měsíce tedy bude

$$T = \frac{D_1 - D}{\omega_0 R_0} = \frac{T_0\,(D_1 - D)}{2\pi R_0} \approx 1{,}6 \text{ hodiny.}$$

5 bodů

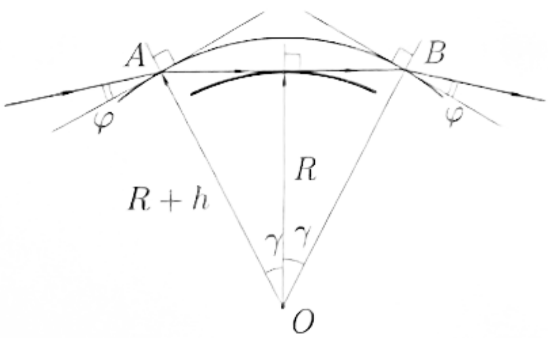
Poznámka: Při započítání pohybu Země kolem Slunce by došlo ke změně výsledku maximálně o 10 %.

b) Zapišme Snellův zákon pro tečný paprsek, který se láme v atmosféře (viz obr. 2):

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = n \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right),$$

neboli

$$\cos\varphi = n\cos\gamma.$$



Obr. R2

Označme $\Delta\varphi = \gamma - \varphi$ úhlovou odchylku lomeného paprsku vzhledem k dopadajícímu. Celkově se po vstupu a výstupu z atmosféry směr paprsku změní o úhel $2\Delta\varphi$.

V případě uvážení lomu světla bude úhel ψ, pod kterým se paprsky protnou, roven $\psi = 2\delta + 4\Delta\varphi$. Dle obr. R2 platí, že $\cos(\gamma) = \dfrac{R}{R+h}$. Dosadíme:

$$L_2 = \frac{R}{\delta + 2\Delta\varphi} = \frac{R}{\delta + 2\left(\arccos\dfrac{R}{R+h} - \arccos\dfrac{nR}{R+h}\right)} = 389\,000\ \text{km}.$$

5 bodů

Alternativní řešení s aproximacemi: Uvážíme-li, že $n = 1 + \Delta n$, kde $\Delta n = 2{,}8 \cdot 10^{-4} \ll 1$ a využijeme také aproximaci malých úhlů, pak můžeme psát

$$1 - \frac{\varphi^2}{2} = (1 + \Delta n)\left(1 - \frac{\gamma^2}{2}\right).$$

Roznásobíme pravou stranu a zanedbáme členy třetího řádu, dostaneme:

$$\frac{\gamma^2 - \varphi^2}{2} = \Delta n$$

To můžeme aproximovat jako $\gamma(\gamma - \varphi) = \Delta n$. Úhel, o který se paprsek vlivem lomu odchýlí, tedy bude

$$\Delta\varphi = \gamma - \varphi = \frac{\Delta n}{\gamma}.$$

Dle obr. R2 platí, že $\cos(\gamma) = \dfrac{R}{R+h}$, tedy

$$\gamma \approx \sin(\gamma) = \sqrt{1 - \left(\frac{R}{R+h}\right)^2} \approx \frac{\sqrt{2Rh}}{R+h} \approx \sqrt{\frac{2h}{R}}.$$

Po dosazení obdržíme

$$L_2 = \frac{2R}{2\delta + 4\Delta\varphi} = \frac{R}{\delta + \Delta n\sqrt{\dfrac{2R}{h}}} \approx 407 \cdot 10^3\ \text{km}.$$

Hodnota je o 4 procenta větší (ve vztahu $\Delta\varphi = \gamma - \varphi$ je rozdíl blízkých čísel).

Poznámka: Web `https://kof.zcu.cz/st/dp/hosnedl/html/astronom.html` uvádí, že odchylka tečného paprsku k zemskému povrchu procházejícího skutečnou atmosférou $\Delta\varphi' = 34'54'' = 0,582°$. Z toho pak plyne skutečná vzdálenost vrcholu plného stínu od středu Země $L_2' = 258\,000$ km, což je méně než minimální vzdálenost Země-Měsíc 363 000 km. To znamená, že při měsíčním zatmění se Měsíc do plného stínu nikdy nedostane a pozemský pozorovatel vidí na jeho povrchu narudlou barvu se spojitě se měnící intenzitou.

2. a) Označme d vzdálenost těžiště smyčky od osy otáčení. Smyčku rozdělíme např. na tři části – na jeden celý závit s hmotností $\frac{2}{3}m$, na vodič délky a a na dva vodiče délky $\frac{b}{2}$. Představíme-li si smyčku otočenou do vodorovné polohy, pak podle momentové věty vzhledem k ose otáčení platí

$$mg \cdot d = \frac{2}{3}mg \cdot 0 + \frac{a}{3\,(a+b)}mg \cdot \frac{b}{2} + \frac{b}{3\,(a+b)}mg \cdot \frac{b}{4}.$$

Z rovnice plyne

$$d = \frac{b\,(2a+b)}{12\,(a+b)}.$$

Moment setrvačnosti smyčky vzhledem k rotační ose je součet momentu setrvačnosti vodičů délky a a momentu setrvačnosti vodičů délky b:

$$J = \frac{a}{a+b}m \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \cdot \frac{b}{a+b}m \cdot b^2 = \frac{3a+b}{12\,(a+b)}mb^2.$$

Direkční moment

$$D_0 = \frac{mgd\sin\varphi}{\varphi} \approx mgd = \frac{b\,(2a+b)}{12\,(a+b)}mg.$$

Perioda

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D_0}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3a+b}{12(a+b)}mb^2}{\frac{b(2a+b)}{12(a+b)}mg}} = 2\pi\sqrt{\frac{3a+b}{2a+b}\cdot\frac{b}{g}} = 0{,}65\ \text{s}.$$

4 body

b) Magnetické síly s vychylovacím účinkem působí pouze na vodorovné vodiče délky a. Nahradíme je jedinou silou $\boldsymbol{F}'$ působící v těžišti rámečku, která má stejný účinek, tj. působí stejným momentem síly vzhledem k ose otáčení:

$$F'd\cos\alpha = 3F \cdot \frac{b}{2}\cos\alpha.$$

Z rovnice plyne

$$F' = \frac{3b}{2d}F = \frac{3b}{2d}BIa.$$

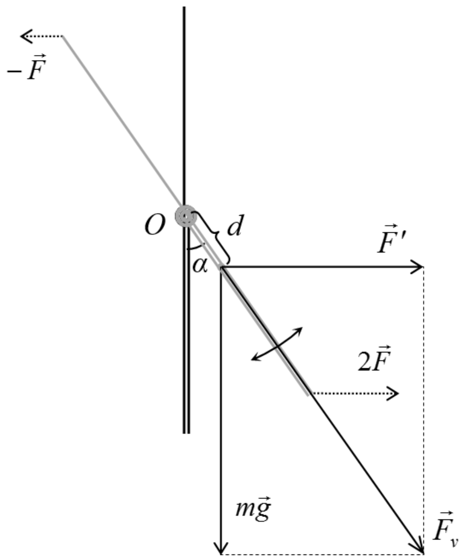
Dále platí

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{F'}{mg} = \frac{\frac{3b}{2d}BIa}{mg} = \frac{3BIab}{2mgd},$$

z čehož plyne

$$I = \frac{2mg\mathrm{tg}\alpha}{3Bab}\cdot d = \frac{2mg\mathrm{tg}\alpha}{3Bab}\cdot\frac{b(2a+b)}{12(a+b)} =$$

$$= \frac{(2a+b)mg}{18a(a+b)B}\mathrm{tg}\alpha = 0{,}64\ \text{A}.$$



Obr. R3

2 body

Alternativně lze novou rovnovážnou polohu vyjádřit přímo rovnicí:

$$mg \cdot d\sin\alpha = 3F \cdot \frac{b}{2}\cos\alpha.$$

c) Při malé úhlové výchylce φ z rovnovážné polohy je pohybovou silou tečná složka síly $\boldsymbol{F}_v$, její velikost je $F_v\sin\varphi$ (podobně jako u kyvadla v tíhovém poli $mg\sin\varphi$). Direkční moment pak je

$$D = \frac{F_v\sin\varphi\cdot d}{\varphi} \approx F_v d = \frac{mg}{\cos\alpha}\cdot d.$$

Poměr period je

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2\pi\sqrt{\dfrac{J}{D}}}{2\pi\sqrt{\dfrac{J}{D_0}}} = \sqrt{\frac{D_0}{D}} = \sqrt{\frac{mgd}{\dfrac{mgd}{\cos\alpha}}} = \sqrt{\cos\alpha} = 0{,}91.$$

2 body

d) Tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ i výslednice $\boldsymbol{F}'$ magnetických sil mají v libovolné poloze smyčky stálou velikost i stálý směr, proto i jejich výslednice $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$ je konstantní vektor. Z toho plyne, že druhá rovnovážná poloha (nyní vratká) nastane při úhlové výchylce $\alpha + \pi$, kdy síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$ má tentokrát směr do osy otáčení.
Otočení těžiště po kruhovém oblouku o poloměru d o úhel π lze nahradit jeho přímočarým posunutím po dráze $2d$ proti síle $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$. Tím vykonáme práci

$$W = F_\mathrm{v}\cdot 2d = \frac{mg}{\cos\alpha}\cdot 2\frac{b\,(2a+b)}{12\,(a+b)} = mgb\cdot\frac{2a+b}{6\,(a+b)\cos\alpha} = 1{,}9\ \mathrm{mJ}.$$

2 body

Alternativně lze práci určit integrálem

$$W = \int_0^\pi M\,(\varphi)\mathrm{d}\varphi = \int_0^\pi F_\mathrm{v} d\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = F_\mathrm{v} d\,[-\cos\varphi]_0^\pi = 2F_\mathrm{v} d.$$

3. a) Pro účinnost motoru pracujícím v Carnotově cyklu platí

$$\eta = \frac{P}{P+P_2} = \frac{T_1 - T}{T_1}.$$

Z rovnice plyne

$$P = P_2\frac{T_1 - T}{T} = \alpha\frac{(T-T_2)\,(T_1-T)}{T}.$$

2 body

b) Z úlohy a) máme k dispozici závislost výkonu P na teplotě T, kde T_1 a T_2 jsou dané konstanty. Vztah upravíme:

$$P = \alpha\frac{(T-T_2)\,(T_1-T)}{T} = \alpha\left[T_1 + T_2 - \left(T + \frac{T_1T_2}{T}\right)\right].$$

Výkon je maximální, jestliže dvojčlen v závorce nabývá minima. Provedeme derivaci:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(T + \frac{T_1T_2}{T}\right) = 1 - \frac{T_1T_2}{T^2}.$$

Z podmínky nulové derivace plyne

$$T_\mathrm{m} = \sqrt{T_1T_2} = 490\ \mathrm{K}.$$

Derivace je pro $T<\sqrt{T_1T_2}$ záporná, pro $T>\sqrt{T_1T_2}$ kladná, proto je nalezený extrém minimem a výkon maximem. **4 body**

c) Maximální výkon tedy je

$$P_\mathrm{max} = \alpha\left[T_1 + T_2 - \left(\sqrt{T_1T_2} + \frac{T_1T_2}{\sqrt{T_1T_2}}\right)\right] = \alpha\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right)^2 = 120\ \mathrm{kW}.$$

2 body

d) Účinnost při maximálním výkonu motoru je

$$\eta_{\mathrm{m}} = \frac{T_1 - \sqrt{T_1 T_2}}{T_1} = \frac{\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}} = 0{,}388.$$ **2 body**

4. a) Uvažujme malý výřez stěny bubliny o obsahu ΔS vnějšího či vnitřního povrchu. Elektrostatické pole uvnitř stěny bubliny o intenzitě $E_0 = \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$ působí na tento výřez silou

$$\Delta F_{\mathrm{e}} = E_0 \cdot Q \frac{\Delta S}{4\pi R^2} = \frac{Q^2 \Delta S}{32\pi^2 \varepsilon_0 R^4},$$

čímž vyvolá tlak

$$p_{\mathrm{e}} = \frac{\Delta F_{\mathrm{e}}}{\Delta S} = \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 R^4}$$

rozpínající bublinu. Naopak povrchové napětí $p_\sigma = \frac{4\sigma}{R}$ způsobuje stahování bubliny. Z podmínky rovnováhy $p_{\mathrm{e}} = p_\sigma$ dostaneme

$$\frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 R_0^4} = \frac{4\sigma}{R_0}. \tag{1}$$

Ze vztahu pro hledaný poloměr bubliny plyne

$$R_0 = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{128\pi^2 \varepsilon_0 \sigma}} \approx 3{,}0 \text{ cm}.$$ **4 body**

b) Malý přetlak Δp v rovnovážném stavu bubliny určeném poloměrem R_0 způsobí změnu poloměru ΔR

$$\Delta p = \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 (R_0 + \Delta R)^4} - \frac{4\sigma}{R_0 + \Delta R},$$

kde na základě rovnice (1) v prvním zlomku nahradíme

$$\frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0} = 4\sigma R_0^3.$$

Po dosazení výraz upravíme pro použití přibližné rovnosti $(1+x)^n = 1 + nx$ ($|x| \ll 1, n \in Z$):

$$\Delta p = \frac{4\sigma R_0^3}{(R_0 + \Delta R)^4} - \frac{4\sigma}{R_0 + \Delta R} = \frac{4\sigma R_0^3}{R_0^4 \left(1 + \dfrac{\Delta R}{R_0}\right)^4} - \frac{4\sigma}{R_0 \left(1 + \dfrac{\Delta R}{R_0}\right)} =$$

$$= \frac{4\sigma}{R_0}\left(1 - 4\frac{\Delta R}{R_0}\right) - \frac{4\sigma}{R_0}\left(1 - \frac{\Delta R}{R_0}\right) = -\frac{12\sigma}{R_0^2}\Delta R.$$

Přetlak Δp vyvolá na plochu výřezu o obsahu ΔS a o hmotnosti $\Delta m = \dfrac{\Delta \mathrm{S}}{4\pi R_0^2} \cdot m$ sílu

$$\Delta F = \Delta p \cdot \Delta S = -\frac{12\sigma}{R_0^2}\Delta R \cdot 4\pi R_0^2 \frac{\Delta m}{m} = -\frac{48\pi\sigma \Delta m}{m} \cdot \Delta R.$$

Síla je přímo úměrná výchylce (změně poloměru) a má opačný směr, pohyb vybraného výřezu, a tím celé stěny bubliny, je harmonický s okamžitým zrychlením

$$a = \frac{\Delta F}{\Delta m} = -\frac{48\pi\sigma}{m} \cdot \Delta R = -\omega^2 \cdot \Delta R,$$

z čehož plyne

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{\pi m}{12\sigma}} = 16\ \mathrm{ms}.$$

4 body

Alternativně je možné tlak jako funkci poloměru

$$p = \frac{4\sigma R_0^3}{R^4} - \frac{4\sigma}{R}$$

derivovat, čímž získáme tzv. gradient tlaku, tj. závislost změny tlaku na vzdálenosti:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}R} = -\frac{16\sigma R_0^3}{R^5} + \frac{4\sigma}{R^2}.$$

Hodnota derivace pro $R = R_0$

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}R}\right)_{R=R_0} = -\frac{12\sigma}{R_0^2}$$

pak udává tuto rychlost změny v R_0 a současně v blízké radiální vzdálenosti. V této oblasti působí na výřez s obsahem ΔS síla splňující 2. Newtonův zákon:

$$\Delta m \cdot \Delta\ddot{R} = -\frac{12\sigma}{R_0^2}\Delta R \cdot \Delta S.$$

Užitím vztahu

$$\Delta m = \frac{\Delta S}{4\pi R_0^2} \cdot m$$

dostaneme rovnici harmonických kmitů

$$\Delta\ddot{R} + \frac{48\pi\sigma}{m}\Delta R = 0,\ \text{kde}\ \frac{48\pi\sigma}{m} = \omega^2.$$

c) Rychlost kapiček aerosolu lze odhadnout ze zákona zachování energie. Při zanedbání povrchového napětí získáme:

$$\frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0} = \frac{mv^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{100Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0 m}} \approx 94\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

2 body