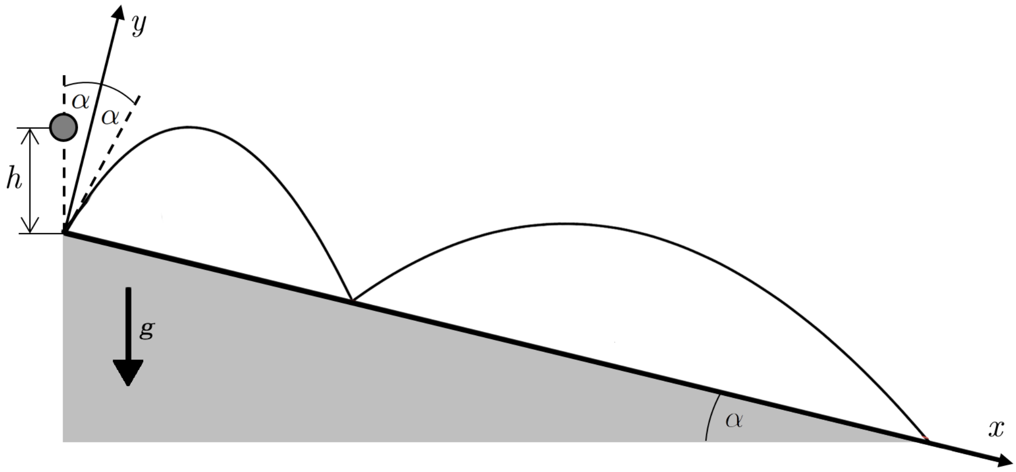
Řešení úloh 1. kola 63. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Autoři úloh: J. Thomas (1, 2, 3, 4, 5, 7) a J. Jírů (6)

1.a) Zvolme vztažnou soustavu, jejíž osa x bude rovnoběžná s nakloněnou rovinou a osa y k ní kolmá (obr. R1)



Obr. R1

Volným pádem získá míček rychlost $v_0 = \sqrt{2hg}$. Po odrazu od nakloněné roviny se pohybuje v soustavě xy jako těleso vržené šikmo vzhůru s počáteční rychlostí v_0 pod úhlem $(90° - \alpha)$ v poli s tíhovým zrychlením $\boldsymbol{g}$, jehož svislá složka je $-g\cos\alpha$. Pro složky rychlosti platí

$$v_x = v_0 \sin\alpha + g\sin\alpha \cdot t \quad \text{a} \quad v_y = v_0 \cos\alpha - g\cos\alpha \cdot t.$$

V nejvyšším bodě trajektorie platí

$$v_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{doba výstupu } t_\mathrm{v} = \frac{v_0}{g}.$$

Dobu letu míčku T k druhému dopadu určíme ze vztahu pro okamžitou výšku

$$y(t) = v_0 t\cos\alpha - \frac{1}{2}g\cos\alpha \cdot t^2,$$

kde položíme $y(T) = 0$. Odtud odvodíme pro dobu letu k druhému dopadu

$$T = \frac{2v_0}{g}.$$

V místě druhého dopadu pak

$$v_x = v_0\sin\alpha + g\sin\alpha \cdot T = 3v_0\sin\alpha \quad \text{a} \quad v_y = v_0\cos\alpha - g\cos\alpha \cdot T = -v_0\cos\alpha.$$

Velikost složky v_y je tedy shodná s prvním odrazem (směr rychlosti se změnil v opačný), proto bude stejná i doba mezi druhým a třetím dopadem míčku a stejná bude i doba letu $T = \frac{2v_0}{g}$. To bude platit i pro všechny další oblouky trajektorie pohybu míčku. **3 body**

Souřadnice pohybujícího se tělesa pro $t \in \langle 0, T\rangle$ jsou

$$x = v_0 t\sin\alpha + \frac{1}{2}g\sin\alpha \cdot t^2,$$

$$y = v_0 t \cos\alpha - \frac{1}{2} g \cos\alpha \cdot t^2.$$

2 body

Protože při každém dopadu je souřadnice $y = 0$ a doba mezi dvěma dopady je $T = \frac{2v_0}{g}$, dojde k druhému dopadu míčku ve vzdálenosti

$$s_1 = x_1 = v_0 T \sin\alpha + \frac{1}{2} g \sin\alpha \cdot T^2 = \frac{4v_0^2}{g} \sin\alpha = 8h \sin\alpha. \qquad \textbf{1 bod}$$

b) K třetímu dopadu míčku dojde ve vzdálenosti

$$x_2 = v_0 2T \sin\alpha + \frac{1}{2} g \sin\alpha \cdot (2T)^2 = \frac{12v_0^2}{g} \sin\alpha = 24h \sin\alpha. \qquad \textbf{1 bod}$$

c) K $(n+1)$-nímu dopadu míčku dojde ve vzdálenosti

$$x_n = v_0 nT \sin\alpha + \frac{1}{2} g \sin\alpha \cdot (nT)^2 = n(n+1)\frac{2v_0^2}{g} \sin\alpha = n(n+1)4h \sin\alpha.$$

Vzdálenost mezi druhým a třetím dopadem míčku

$$s_2 = x_2 - x_1 = 16h \sin\alpha = 2s_1.$$

Vzdálenost mezi třetím a čtvrtým dopadem míčku

$$s_3 = x_3 - x_2 = 24h \sin\alpha = 3s_1.$$

Vzdálenost mezi n-tým a $(n+1)$-ním dopadem bude

$$s_n = x_n - x_{n-1} = n(n+1)4h \sin\alpha - (n-1)n4h \sin\alpha = n8h \sin\alpha = ns_1.$$

Hledaný poměr vzdáleností tedy je: $s_1 : s_2 : s_3 : \ldots s_n = 1 : 2 : 3 : \ldots : n.$

3 body

2.a) Vozík se odrazí rychlostí v_1, a hranol se bude pohybovat rychlostí u_1. Podle ZZH $mv = Mu_1 - mv_1$ a podle ZZE $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Mu_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2$. Rovnice upravíme

$$m\left(v^2 - v_1^2\right) = Mu_1^2,$$
$$m\left(v + v_1\right) = Mu_1.$$

Dělením rovnic dostaneme

$$u_1 = v - v_1,$$

po dosazení do druhé rovnice velikost rychlosti vozíku

$$v_1 = v\frac{M-m}{M+m} = \frac{v}{2}$$

a velikost rychlosti hranolu $u_1 = v - v_1 = \frac{v}{2}$. **4 body**

b) Znovu použijeme ZZH a ZZE:

$$m\frac{v}{2} = Mu_2 - mv_2 \text{ a } \frac{1}{2}m\frac{v^2}{4} = \frac{1}{2}Mu_2^2 + \frac{1}{2}mv_2^2.$$

Rovnice upravíme:

$$m\left(\frac{v^2}{4} - v_2^2\right) = Mu_2^2,$$

$$m\left(\frac{v}{2} + v_2\right) = Mu_2.$$

Dělením rovnic dostaneme

$$u_2 = \frac{v}{2} - v_2.$$

Dosazením do předešlého vztahu bude velikost rychlosti vozíku

$$v_2 = \frac{v}{2}\frac{M-m}{M+m} = \frac{v}{4},$$

a velikost rychlosti hranolu

$$u_2 = \frac{v}{2} - v_2 = \frac{v}{4}.$$

2 body

c) Podle ZZE se počáteční kinetická energie vozíku nakonec spotřebuje na práci při překonávání sil tření, tedy $\frac{1}{2}mv^2 = fMg\,(l_1 + l_2)$. Protože rychlost, jakou narazí vozík na levý hranol má vždy poloviční velikost v porovnání s rychlostí, jakou narazil vozík na pravý hranol, bude posunutí levého hranolu čtyřikrát menší, než posunutí pravého hranolu $l_2 = \dfrac{l_1}{4}$. Protože je také $m = \dfrac{M}{3}$, bude pro celkové posunutí pravého hranolu platit $l_1 = \dfrac{2v^2}{15fg}$, a pro celkové posunutí levého hranolu bude platit $l_2 = \dfrac{v^2}{30fg}$. **4 body**

3.a) Na každou desku působí v jejím těžišti tíhová síla a také reakce válce $\boldsymbol{N}$ a síla tření $\boldsymbol{F}_t$. Označíme-li α úhel, který svírá každá deska s vertikálou, procházející středem válce, pak můžeme napsat momentovou větu vzhledem k bodu O

$$mg\frac{l}{2}\sin\alpha = N\frac{l}{2}. \tag{1}$$

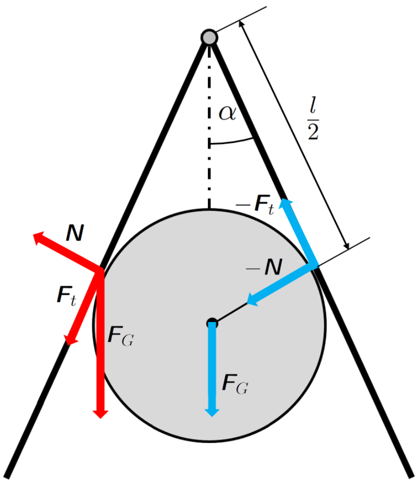
Rovnováha sil pro válec:

$$Mg + 2N\sin\alpha = 2F_t\cos\alpha = 2fN\cos\alpha. \tag{2}$$

Ze vztahu (1) plyne $N = mg\sin\alpha$, dosazením do vztahu (2) pak

$$Mg + 2mg\sin^2\alpha = 2F_t\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad F_t = \frac{Mg + 2mg\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}. \tag{3}$$

Nemá-li válec vypadnout, musí platit $f \geq \dfrac{F_t}{N}$. (4)



Obr. R2

Z obrázku je vidět, že

$$\sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}} = \frac{2R}{\sqrt{4R^2 + l^2}} \quad \text{a}$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}} = \frac{l}{\sqrt{4R^2 + l^2}}.$$

Ze vztahů (3) a (4) pak

$$f \geq \frac{M + 2m\frac{4R^2}{4R^2 + l^2}}{2m\frac{2R}{\sqrt{4R^2 + l^2}}\frac{l}{\sqrt{4R^2 + l^2}}} = \frac{M\left(4R^2 + l^2\right) + 8mR^2}{4mRl} =$$

$$= \frac{M\left(4R^2 + l^2\right)}{4mRl} + \frac{2R}{l} = 0{,}98.$$

5 bodů

b) Z momentové věty nyní plyne $mg\frac{l}{2}\sin\alpha = N_1\frac{3l}{4}$.
Rovnováha sil pro válec nyní bude

$$Mg + 2N_1\sin\alpha = 2f_1N_1\cos\alpha,$$

po dosazení za N_1

$$Mg + \frac{4}{3}mg\sin^2\alpha = f_1\frac{4}{3}mg\sin\alpha\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad f_1 \geq \frac{3Mg + 4mg\sin^2\alpha}{4mg\sin\alpha\cos\alpha}.$$

po dosazení za

$$\sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{3l}{4}\right)^2}} = \frac{4R}{\sqrt{16R^2 + 9l^2}} \quad \text{a} \quad \cos\alpha = \frac{\frac{3l}{4}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{3l}{4}\right)^2}} = \frac{3l}{\sqrt{16R^2 + 9l^2}}$$

$$f_1 \geq \frac{3M + 4m\frac{16R^2}{16R^2 + 9l^2}}{4m\frac{4R}{\sqrt{16R^2 + 9l^2}}\frac{3l}{\sqrt{16R^2 + 9l^2}}} = \frac{3M\left(16R^2 + 9l^2\right) + 64mR^2}{48mlR} =$$

$$= \frac{M\left(16R^2 + 9l^2\right)}{16mlR} + \frac{4R}{3l} = 1{,}47.$$

3 body

c) Označme x vzdálenost bodu dotyku od osy otáčení. Z momentové věty nyní

$$mg\frac{l}{2}sin\alpha = N_2x. \tag{5}$$

Rovnováha sil pro válec nyní bude

$$Mg + 2N_2\sin\alpha = 2F_t\cos\alpha = 2f_2N_2\cos\alpha, \tag{6}$$

a dále $\sin\alpha = \dfrac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$ a $\cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$.

Dosazením do rovnice (6)

$$Mg + mg\frac{l}{x}\sin^2\alpha = f_2mg\frac{l}{x}\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$M + m\frac{l}{x}\frac{R^2}{(R^2+x^2)} = f_2m\frac{Rl}{(R^2+x^2)},$$

$$Mx(R^2+x^2) + mlR^2 = f_2mxlR,$$

$$Mx^3 + xR\,(MR - f_2ml) + mlR^2 = 0,$$

$$0{,}4x^3 + xR\,(0{,}4R - f_2l) + lR^2 = 0,$$

$$0{,}4x^3 - 0{,}020\,5x + 0{,}005 = 0,$$

resp.

$$x^3 - 0{,}051\,25x + 0{,}012\,5 = 0.$$

Pomocí grafické kalkulačky nebo pomocí aplikace Grafy, stažené z internetu, nebo pomocí EXCELu se můžeme přesvědčit, že tato rovnice nemá kladné řešení. Při tak malém součiniteli tření by se válec mezi deskami neudržel. **2 body**

Při hledání extrémů funkce můžeme použít diferenciální počet.

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(x^3 - 0{,}051\,25x + 0{,}012\,5)}{\mathrm{d}x} = 3x^2 - 0{,}051\,25 = 0 \quad\Rightarrow\quad x = \pm 0{,}130\,7,$$

přičemž v bodě $x = +0{,}130\,7$ má funkce kladné minimum 0,008.

4.a) Z kalorimetrické rovnice $mc\,(t_1 - t_{01}) = \Delta mc\,(t_{02} - t_1)$ vyjádříme t_1:

$$t_1 = \frac{mt_{01} + \Delta mt_{02}}{m + \Delta m} = \frac{kt_{02} + t_{01}}{k+1},$$

kde $k = \dfrac{\Delta m}{m} < 1$.

Po vrácení vody do druhého kalorimetru platí

$$c(2m - \Delta m)\,(t_{02} - t_2) = c\Delta m\,(t_2 - t_1)\,,$$

takže po úpravě

$$2t_2 = t_{02}(2-k) + kt_1 = t_{02}(2-k) + \frac{k^2t_{02} + kt_{01}}{k+1} = \frac{k\,(t_{01} + t_{02}) + 2t_{02}}{k+1}.$$

Rozdíl teplot

$$t_2 - t_1 = \frac{k\,(t_{01}+t_{02}) + 2t_{02}}{2(k+1)} - \frac{kt_{02}+t_{01}}{k+1} = \frac{2\,(t_{02}-t_{01}) - k\,(t_{02}-t_{01})}{2(k+1)} =$$

$$= \frac{2-k}{2(1+k)}\,(t_{02}-t_{01}) = 42\ ^\circ\mathrm{C}.$$

5 bodů

b) Budeme-li přelévání opakovat ještě jednou, bude postup podobný a dostaneme

$$t_4 - t_3 = \frac{2-k}{2(1+k)}\,(t_2 - t_1) = \left[\frac{2-k}{2(1+k)}\right]^2 (t_{02}-t_{01}) = 29{,}4\ ^\circ\mathrm{C}.$$

2 body

c) Aby byl rozdíl teplot $\Delta t < 1\ ^\circ\mathrm{C}$, musíme celý proces opakovat nejméně n-krát, musíme tedy vyřešit exponenciální rovnici:

$$\Delta t = \left(\frac{2-k}{2(1+k)}\right)^n (t_{02}-t_{01}) \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\log \dfrac{\Delta t}{t_{02}-t_{01}}}{\log \dfrac{2-k}{2(1+k)}} = 11{,}5.$$

Celý postup tedy budeme muset opakovat 12-krát. **3 body**

5.a) Vstupní ventil bude otevřený, bude-li tlak pod pístem

$$p < p_0 - \Delta p_1 = 0{,}80 p_0.$$

Výstupní ventil bude otevřený, když bude tlak pod pístem

$$p > p_0 + \Delta p_2 = 1{,}40 p_0.$$

Tlak uvnitř válce se může měnit v rozmezí $0,80 p_0 \leq p \leq 1,40 p_0$. Při splnění této podmínky zůstávají ventily uzavřené. Největší množství vzduchu bude ve válci v okamžiku, kdy je v horní poloze

$$n_1 = \frac{0{,}8 p_0 2V_0}{RT_0} = \frac{1{,}6 p_0 V_0}{RT_0} = 0{,}064 \text{ molu}.$$

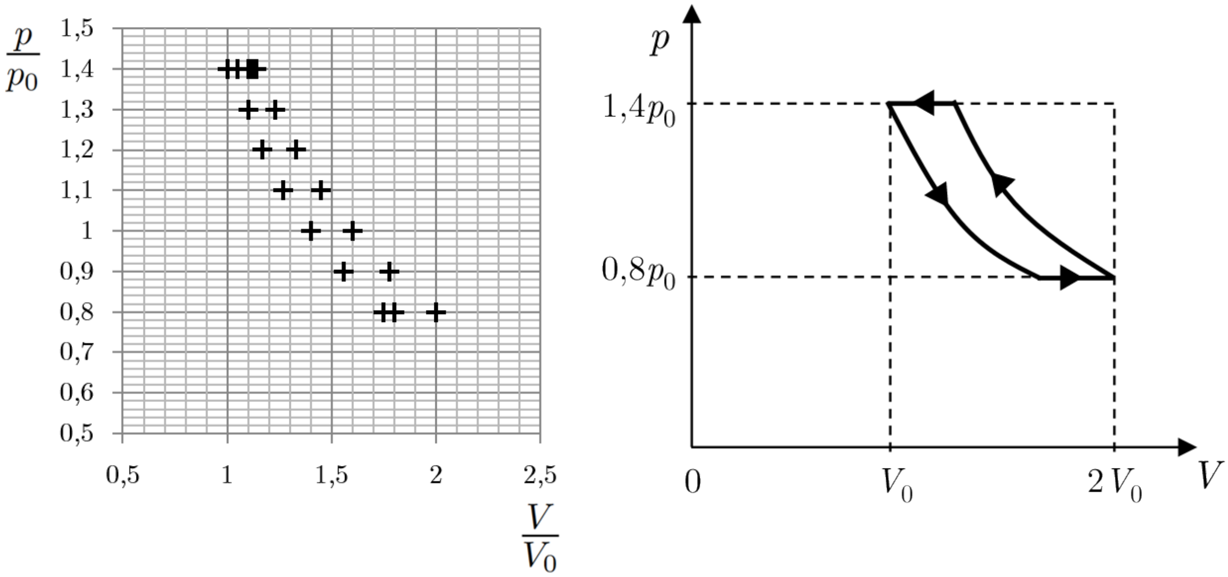
Nejmenší množství vzduchu bude ve válci, když se píst nachází v dolní poloze

$$n_2 = \frac{1{,}4 p_0 V_0}{RT_0} = 0{,}056 \text{ molu}.$$

3 body

b) Při otevření vstupního ventilu zůstává tlak ve válci $0{,}8 p_0$, dokud objem plynu nedosáhne hodnoty $2V_0$. Při pohybu pístu dolů se vstupní ventil uzavírá a probíhá děj izotermický, dokud se neotevře výstupní ventil, tedy dokud tlak nedosáhne hodnoty $1{,}4 p_0$. Za tohoto tlaku píst pokračuje v pohybu dolů, až do zmenšení objemu na V_0. Při zvětšování objemu probíhá opět děj izotermický, dokud se neotevře vstupní ventil, tedy dokud tlak neklesne na hodnotu $0{,}8 p_0$.
Pro sestrojení grafu vytvoříme tabulku a sestrojíme graf na obr. R3

$\frac{p}{p_0}$	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,4	1,3	1,2	1,1	1	0,9	0,8	0,8
$\frac{V}{V_0}$	2,0	1,78	1,6	1,45	1,33	1,23	1,14	1,0	1,1	1,17	1,27	1,4	1,02	1,75	2,0



Obr. R3

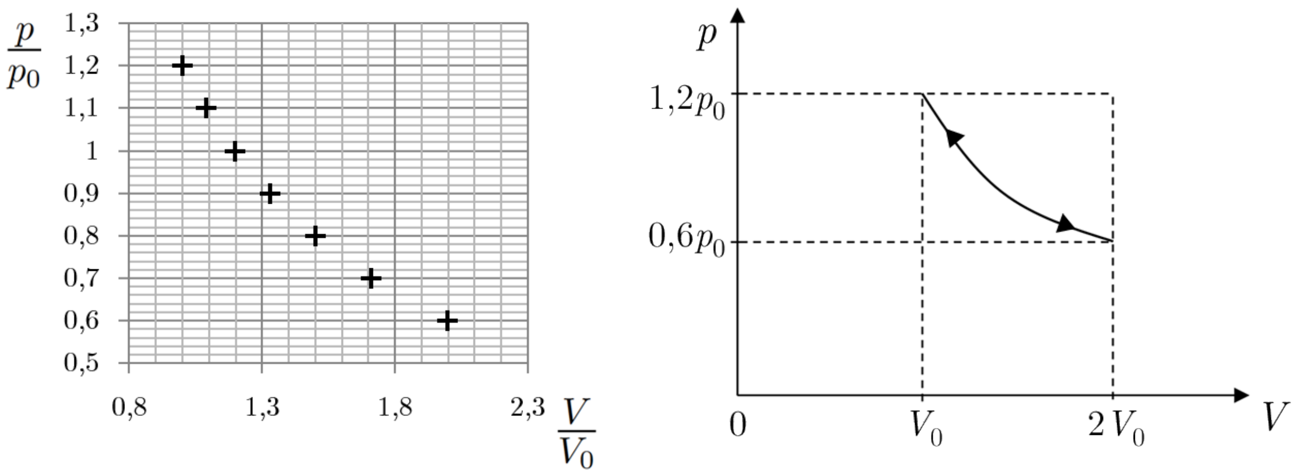
3 body

c) V tomto případě je vstupní ventil otevřený, když $p < p_0 - \Delta p_1 = 0{,}6p_0$ a výstupní ventil je otevřený, když $p > p_0 + \Delta p_2 = 1{,}2p_0$. Oba ventily jsou tedy uzavřené, když $0{,}6p_0 \leq p \leq 1{,}2p_0$. Tehdy zůstává množství vzduchu ve válci stálé

$$n_3 = \frac{0{,}6p_0 2V_0}{RT_0} = \frac{1{,}2p_0 V_0}{RT_0} = 0{,}048 \text{ molu}.$$

Grafem v pV diagramu je pouze jedna izoterma.

$\frac{p}{p_0}$	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2
$\frac{V}{V_0}$	2	1,71	1,5	1,33	1,2	1,09	1

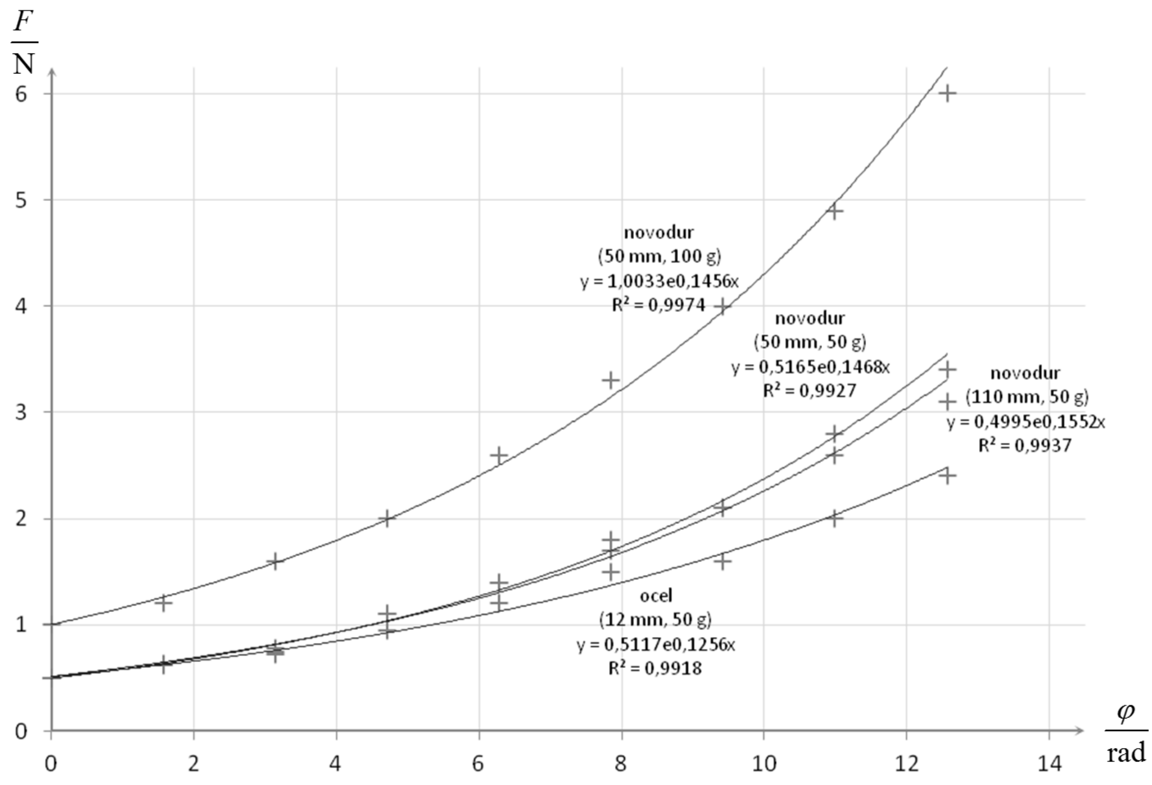


Obr. R4

4 body

6. Byly použity siloměry s rozsahem 1 N, 2 N, 3 N, 5 N, 10 N, z nichž bylo možné odečíst hodnoty na dvě platné číslice. Měřená síla však během velmi pomalého rovnoměrného pohybu vykazovala kolísání, do zápisu byla použita její nejmenší hodnota, čímž výsledný součinitel smykového tření je možné považovat za minimální. Jako válcové profily byly použity novodurové trubky o průměru 50 mm a 110 mm a hladká ocelová tyč o průměru 12 mm. V grafu jsou vynesené body proloženy exponenciálou. Ze zobrazené rovnice regrese je vyčten součinitel smykového tření a po zaokrouhlení na dvě platné číslice doplněn do tabulky.

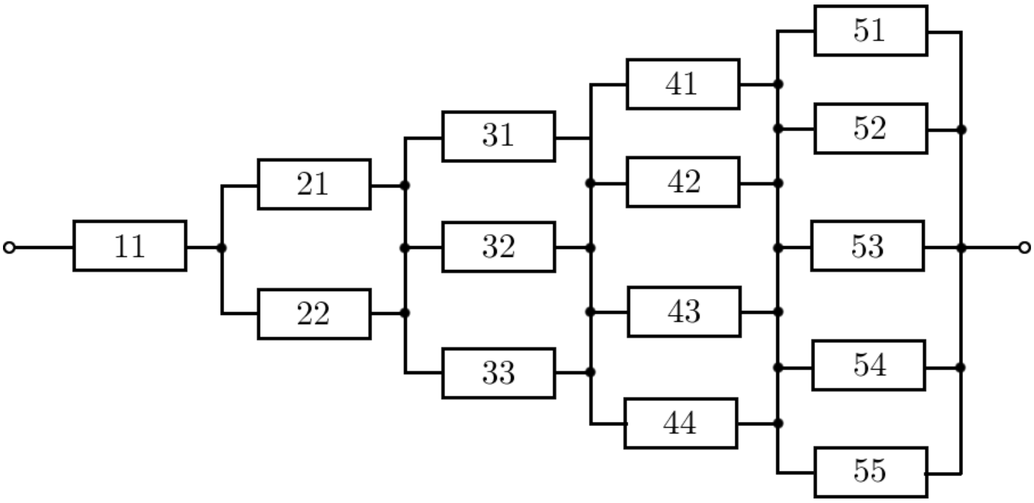
$\frac{\varphi}{\text{rad}}$	$\frac{F_1}{\text{N}}$ $m = 50$ g novodur $d = 50$ mm	$\frac{F_2}{\text{N}}$ $m = 100$ g novodur $d = 50$ mm	$\frac{F_3}{\text{N}}$ $m = 50$ g novodur $d = 110$ mm	$\frac{F_4}{\text{N}}$ $m = 50$ g ocel $d = 12$ mm
0	0,50	1,0	0,50	0,50
$\frac{\pi}{2}$	0,62	1,2	0,63	0,62
π	0,75	1,6	0,78	0,72
$\frac{3\pi}{2}$	1,1	2,0	1,1	0,95
2π	1,4	2,6	1,4	1,2
$\frac{5\pi}{2}$	1,8	3,3	1,7	1,5
3π	2,1	4,0	2,1	1,6
$\frac{7\pi}{2}$	2,8	4,9	2,6	2,0
4π	3,4	6,0	3,1	2,4
f	0,15	0,15	0,16	0,13



Obr. R5

Závěr: Výsledky měření v rámci možné přesnosti vykazují předpokládanou exponenciální závislost tahové síly $F = mg{\cdot}\mathrm{e}^{f\varphi}$ i její nezávislost na průměru válce. Minimální součinitel smykového tření mezi provázkem a novodurovou trubkou se při třech variantách měření pohyboval v rozmezí 0,15 až 0,16, pro minimální součinitel smykového tření mezi provázkem a ocelovou tyčí vychází hodnota 0,13.

7.a) Zapojení se skládá s pěti skupin rezistorů zapojených paralelně. Rezistory očíslujeme podle obrázku R6. Odpor každého rezistoru označíme R.



Obr. R6

Určíme celkový odpor: $R_C = R + \dfrac{R}{2} + \dfrac{R}{3} + \dfrac{R}{4} + \dfrac{R}{5} = \dfrac{137}{60}R.$ **1 bod**

Každou skupinou rezistorů prochází celkový proud

$$I = \frac{60U_0}{137R}.$$

Na prvním bloku s jedním rezistorem bude napětí

$$U_1 = \frac{60U_0}{137} > \frac{U_0}{7}.$$

První rezistor ovšem nelze odebrat.

Na druhém bloku bude napětí $U_2 = \frac{30U_0}{137} > \frac{U_0}{7}$, na třetím bloku $U_3 = \frac{20U_0}{137} > \frac{U_0}{7}$, rezistor z těchto bloků tedy odebrat nelze. **2 body**

Napětí na každém rezistoru 4. bloku je $U_4 = \frac{15U_0}{137} < \frac{U_0}{7}$, napětí na každém rezistoru 5. bloku je $U_5 = \frac{12U_0}{137} < \frac{U_0}{7}$, ze 4. nebo 5. bloku tedy lze rezistory odebírat. **2 body**

Odebere-li Lupin 2 rezistory z 5. bloku a jeden rezistor ze 4. bloku, bude celkový odpor

$$R_{C1} = R + \frac{R}{2} + \frac{R}{3} + \frac{R}{3} + \frac{R}{3} = \frac{5}{2}R.$$

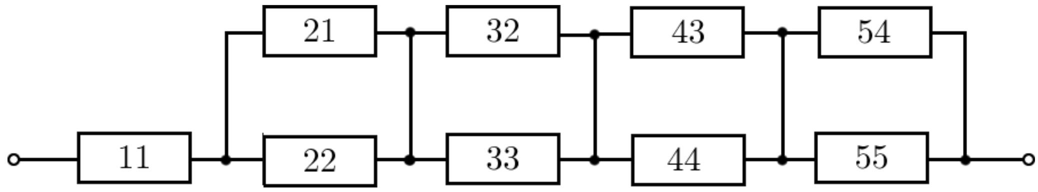
Celkový proud bude $I_1 = \frac{2U_0}{5R}$, napětí na jednotlivých blocích budou

$$U_{11} = \frac{2U_0}{5} > \frac{U_0}{7}, \quad U_{21} = \frac{U_0}{5} > \frac{U_0}{7}, \quad U_{31} = U_{41} = U_{51} = \frac{2U_0}{15} < \frac{U_0}{7}.$$

Odebere-li Lupin po jednom rezistoru ze 3., 4. a 5. bloku, bude celkový odpor:

$$R_{C2} = R + \frac{R}{2} + \frac{R}{2} + \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = 3R,$$

celkový proud bude $I_2 = \frac{U_0}{3R}$, napětí na prvním rezistoru bude $U_{12} = \frac{U_0}{3} > \frac{U_0}{7}$, na 2. až 5. bloku budou napětí $U_{22} = U_{32} = U_{42} = U_{52} = \frac{U_0}{6} > \frac{U_0}{7}$.
Lupin tedy může odebrat nejvýše 6 rezistorů s diamanty. Konečné schéma obvodu je na obr. R7.



Obr. R7

5 bodů