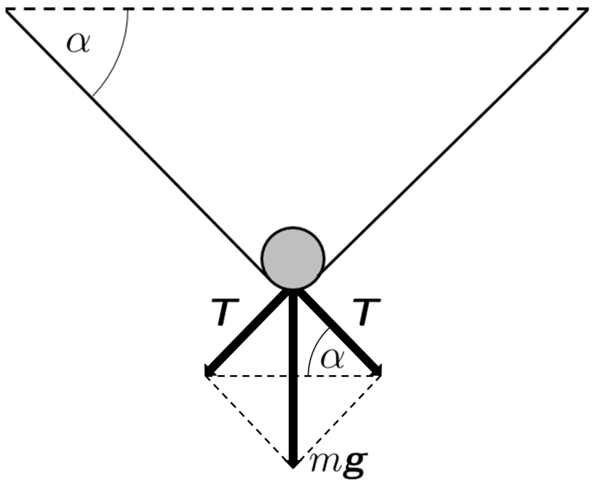
Řešení úloh krajského kola 63. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie B

Úlohy navrhl J. Thomas

1. a) Tíha se rozkládá na dvě složky o velikosti $\boldsymbol{T}$ (obr. R1).



Obr. R1

Platí:

$$T = \frac{mg}{2\sin\alpha}.$$

1 bod

b) V okamžiku opuštění stuhy bude na váleček působit pouze tíhová síla. Zrychlení $-g$ válečku bude orientováno svisle dolů. **1 bod**

c) Protože je tření mezi stuhou a válečkem zanedbatelné, bude váleček stále v nejnižší možné poloze, a opustí stuhu v okamžiku, kdy je stuha vodorovná. K výpočtu velikosti rychlosti válečku využijeme zákon zachování energie. Práce, kterou vykoná síla $\boldsymbol{F}$, je rovna součtu kinetické energie válečku a zvýšení jeho potenciální energie tíhové:

$$F\,(2l - 2l\cos\alpha) = \frac{1}{2}mv^2 + mgl\sin\alpha.$$

Odtud $v = \sqrt{2l\,\left[\dfrac{2F(1-\cos\alpha)}{m} - g\sin\alpha\right]}$. **4 body**

d) Pokud bude výraz pod odmocninou záporný, váleček stuhu neopustí. Má-li stuhu opustit, musí být

$$F > \frac{mg\sin\alpha}{2(1-\cos\alpha)} = \frac{mg}{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

2 body

e) Váleček vystoupí do výšky

$$h = \frac{v^2}{2g} + l\sin\alpha = 2l\,\frac{F}{mg}\,(1-\cos\alpha)\,.$$ **2 body**

2. a) Podle kalorimetrické rovnice

$$C\,(t_1 - t_0) = kC\,(t - t_1)$$

vyjádříme

$$t_1 = \frac{kt + t_0}{1+k} = \frac{kt + t - t + t_0}{1+k} = t - \frac{1}{1+k}\,(t - t_0) = 23{,}1\ ^\circ\mathrm{C}.$$

3 body

b) Opět podle kalorimetrické rovnice

$$C\,(t_2 - t_1) = kC\,(t - t_2)$$

$$t_2 = t - \frac{1}{1+k}\,(t - t_1) = t - \left(\frac{1}{1+k}\right)^2 (t - t_0) = 26{,}0\ ^\circ\mathrm{C}.$$

2 body

c) Budeme-li postup opakovat n-krát, bude pro výslednou teplotu platit

$$t_n = t - \left(\frac{1}{1+k}\right)^n (t - t_0)\,. \tag{1}$$

Pro $n = 10$ je $t_{10} = 46{,}0\ ^\circ\mathrm{C}$. **2 body**

d) Vztah (1) upravíme

$$t - t_n = \left(\frac{1}{1+k}\right)^n (t - t_0)$$

a po zlogaritmování vyjádříme

$$n = \frac{\log \dfrac{t - t_0}{t - t_n}}{\log(1+k)}.$$

Dosadíme-li za $t_n = 60°C$, dostaneme číselný výsledek $n = 17{,}7$. Aby výsledná teplota přesáhla $t_n = 60\ ^\circ\mathrm{C}$ musíme tedy celý postup opakovat 18krát. **3 body**

3. a) Rychlost kabiny na konci třetí sekundy $v_1 = at_1 = 1{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Kabina byla zvednuta o $s_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = 1{,}8$ m. Stejnou vzdálenost urazí kabina i při rovnoměrně zpomaleném pohybu na konci dráhy $s_3 = \frac{1}{2}at_3^2 = 1{,}8$ m. Zvedání kabiny rovnoměrným pohybem bude trvat po dobu

$$t_2 = \frac{s - s_1 - s_3}{v_1} = \frac{s - \frac{1}{2}at_1^2 - \frac{1}{2}at_1^2}{\mathrm{a}.t_1} = \frac{s - at_1^2}{at_1} = 56\ \mathrm{s}.$$

Celkem bude zvedání kabiny trvat 62 s. **3 body**

b) Na prvním úseku pracují motory výtahu s výkonem:

$$P_1 = \frac{W_1}{t_1} = \frac{m(g+a)s_1}{t_1} = \frac{m(g+a)at_1}{2} = 150\ \mathrm{kW}.$$

Výkon na druhém úseku

$$P_2 = \frac{W_2}{t_2} = \frac{mg\,(s - s_1 - s_3)}{\dfrac{s - s_1 - s_3}{v_1}} = mgv_1 = mgat_1 = 290\ \mathrm{kW}.$$

Výkon na třetím úseku

$$P_3 = \frac{W_3}{t_3} = \frac{m(g-a)s_3}{t_3} = \frac{m(g-a)at_3}{2} = 140\ \mathrm{kW}.$$

Spotřeba energie během jednoho vytažení kabiny

$$E = P_1t_1 + P_2t_2 + P_3t_3 = \frac{m(g+a)at_1}{2}t_1 + mg\left(s - at_1^2\right) + \frac{m(g-a)at_3}{2}t_3 =$$

$$= \frac{m\left[(g+a)at_1^2 + 2g\left(s - at_1^2\right) + (g-a)at_3^2\right]}{2} = 17{,}4\ \mathrm{MJ} = 4{,}8\ \mathrm{kWh}.$$

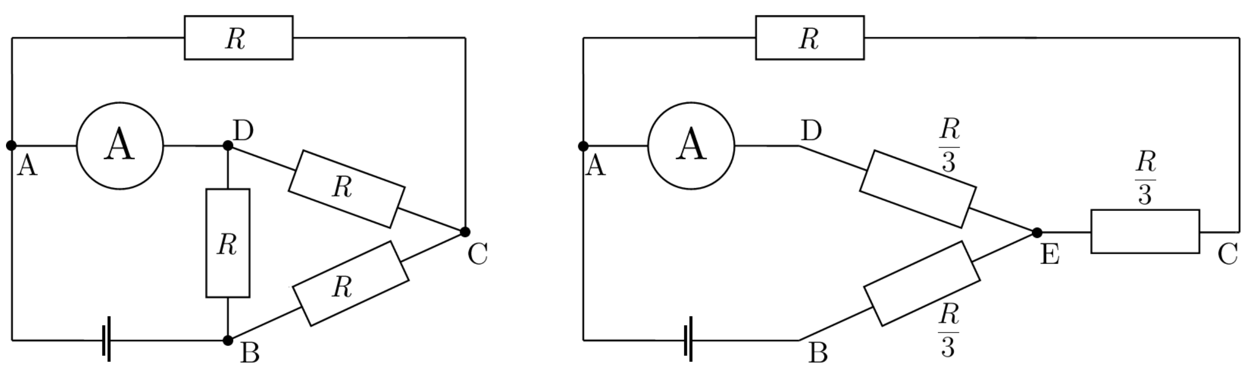
4 body

c) Potenciální energie tíhová kabiny se mění na kinetickou energii a její část se během brzdění mění na teplo:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + m_1c\Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{mgh - \frac{1}{2}mv^2}{m_1c} = 20\ {}^\circ\mathrm{C}.$$

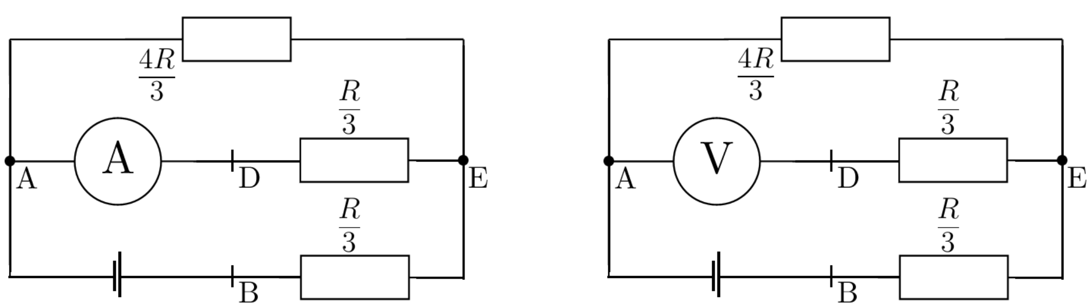
Měděné desky se ohřejí o 20 °C. **3 body**

4. a) Schéma dle obr. R2 překreslíme a spojení do trojúhelníka nahradíme spojením do hvězdy:



Obr. R2

$$R_{\mathrm{DE}} = R_{\mathrm{BE}} = R_{\mathrm{CE}} = \frac{R.R}{R+R+R} = \frac{R}{3}.$$



Obr. R3

4 body

V zapojení s ampérmetrem je odpor mezi body A a E

$$R_{\mathrm{AE}} = \frac{\frac{4}{3}R\frac{R}{3}}{\frac{5}{3}R} = \frac{4}{15}R$$

a celkový odpor

$$R_C = \frac{4}{15}R + \frac{R}{3} = \frac{3}{5}R.$$

Celkový proud $I_C = \frac{U_e}{\frac{3}{5}R} = \frac{5U_e}{3R}$, napětí mezi body B a E $U_{\mathrm{BE}} = I_C.\frac{R}{3} = \frac{5U_e}{3R}\frac{R}{3} = \frac{5}{9}U_e$, napětí mezi body A a E je tedy $U_{\mathrm{AE}} = \frac{4}{9}U_e$. Ampérmetrem prochází proud $I = \frac{U_{\mathrm{AE}}}{\frac{R}{3}} = \frac{\frac{4}{9}U_e}{\frac{R}{3}} = \frac{4U_e}{3R}$. **2 body**

V zapojení s voltmetrem je celkový odpor $R_C = \frac{5}{3}R$, celkový proud $I_C = \frac{U_e}{\frac{5}{3}R} = \frac{3U_e}{5R}$, napětí mezi body B a E je $U_{\mathrm{BE}} = I_C.\frac{R}{3} = \frac{3U_e}{5R}.\frac{R}{3} = \frac{U_e}{5}$. Voltmetr ukazuje napětí $U = U_e - U_{\mathrm{BE}} = \frac{4U_e}{5}$. Elektromotorické napětí zdroje je tedy $U_e = \frac{5}{4}U = 15\ V$. **2 body**

Ze vztahu pro proud $I = \frac{4U_e}{3R}$, z čehož $R = \frac{4U_e}{3I} = \frac{5U}{3I} = 10\ \Omega$. **2 body**

Alternativní řešení:

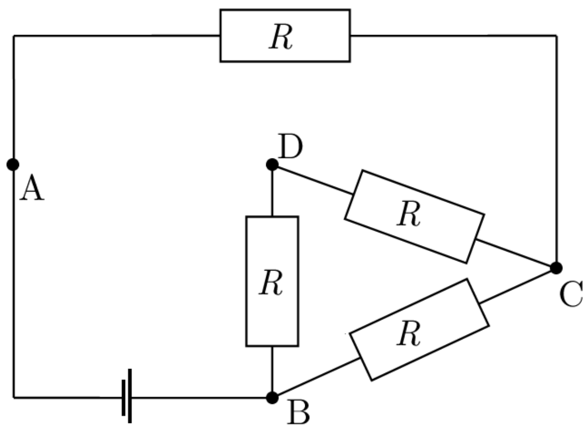
Pro proud ampérmetrem v obr. R2 platí $I = I_{\mathrm{BD}} + I_{\mathrm{CD}}$. Vnitřní odpor ideálního ampérmetru je zanedbatelně malý vzhledem k R. Body B a A jsou pak spojeny dvěma větvemi: Jedna je tvořena jediným rezistorem mezi B a D dále napojeným ampérmetrem na A, druhou větev BCA tvoří jeden rezistor mezi B a C napojený sériově na paralelně spojenou dvojici rezistorů mezi body A a C (jeden z nich mezi body C a D je opět ampérmetrem napojen na A), tedy v této větvi $R_{BC} = 2\ R_{CA}$, tedy $U_{CD} = U_{CA} = 1/3\ U_e$. Pro proudy dostáváme

$$I_{\mathrm{BD}} = \frac{U_e}{R},\ I_{\mathrm{CD}} = \frac{U_e}{3R},\ \text{odkud}\ I = I_{\mathrm{BD}} + I_{\mathrm{CD}} = \frac{4U_e}{3R}.$$ **3 body**

Ideální voltmetr proudově nezatěžuje obvod, tedy jeho odpojením se rozložení proudů a potenciálu v náhradním obvodu změní zcela zanedbatelně. Odpor $R_{\mathrm{BC}} = \frac{2R\cdot R}{2R+R} = \frac{2}{3}R$, celkový odpor $R_C = \frac{5}{3}R$, napětí $U_{\mathrm{BD}} = \frac{1}{2}U_{\mathrm{BC}} = \frac{1}{2}\ \frac{R_{\mathrm{BC}}}{R_C} = \frac{1}{5}U_e$ a tedy $U = U_e - U_{\mathrm{BD}} = \frac{4}{5}U_e$. **3 body**

Elektromotorické napětí zdroje je tedy $U_e = \frac{5}{4}U = 15\ V$. **2 body**

Ze vztahu pro proud $I = \frac{4U_e}{3R}$, z čehož $R = \frac{4U_e}{3I} = \frac{5U}{3I} = 10\ \Omega$. **2 body**



Obr. R4