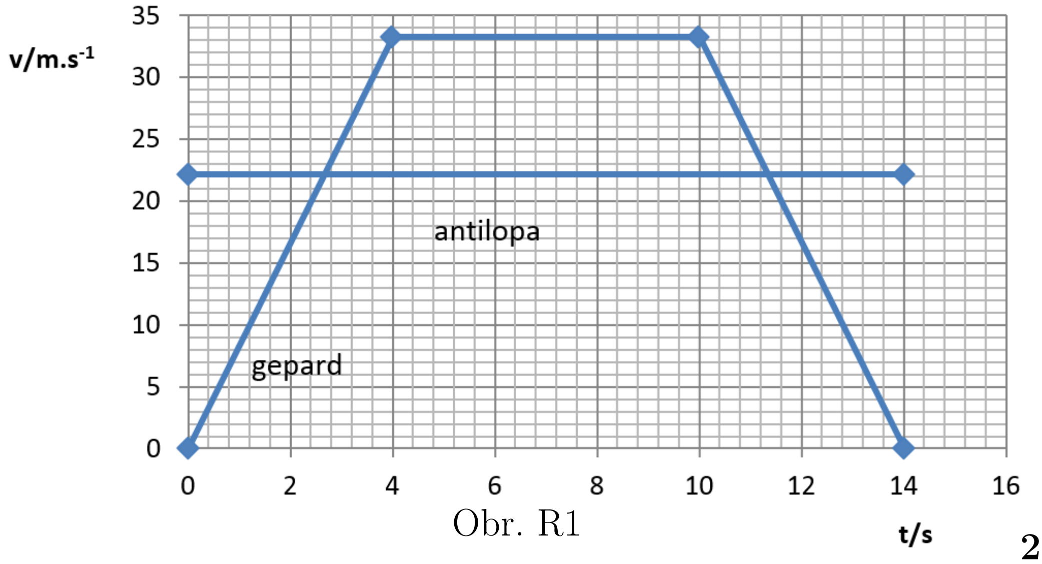
Řešení úloh 1. kola 63. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Autoři úloh: J. Thomas (1, 2, 3, 5, 7), J. Jírů (4, 6) a P. Šedivý (6)

1.a) Graf závislosti rychlosti geparda a antilopy na čase:



Obr. R1

2 body

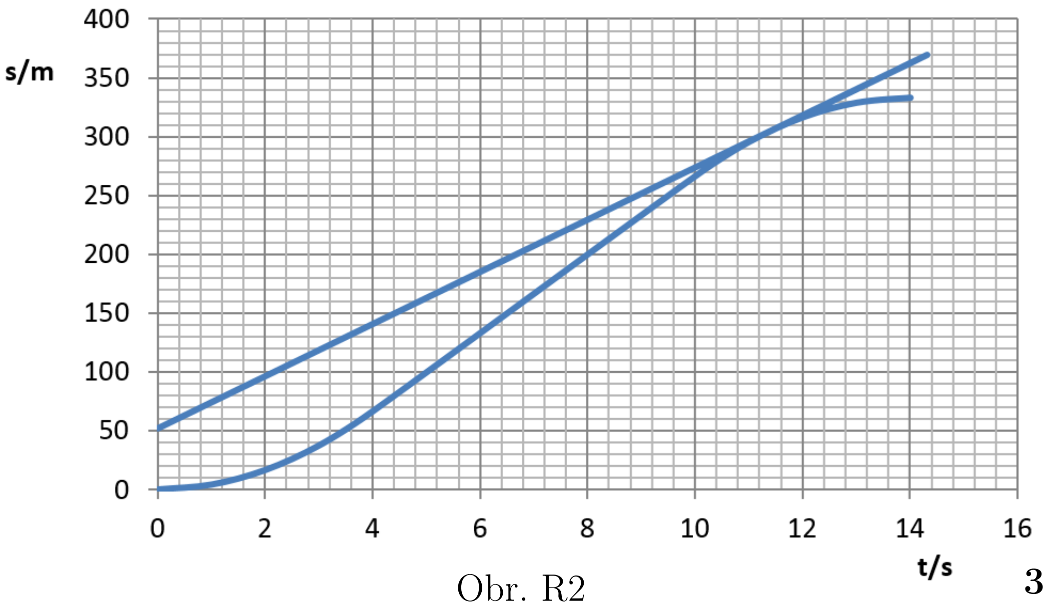
První 4 sekundy se gepard pohybuje rovnoměrně zrychleně, platí tedy $s_1 = \frac{1}{2}\frac{v_g}{t_1}t^2$, na druhém úseku se pohybuje rovnoměrně, proto $s_2 = v_g t$, na třetím úseku rovnoměrně zpomaleně, tedy

$$s_3 = v_g t - \frac{1}{2}\frac{v_g}{t_1}t^2.$$

Vypočítané hodnoty zapíšeme do tabulky a sestrojíme graf:

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	1	2	3	4	10	11	12	13	14
$\frac{s}{\mathrm{m}}$	0	4,2	17	38	67	267	296	317	329	333

Má-li gepard antilopu dostihnout, musí být jeho rychlost alespoň stejná, jako rychlost antilopy. Přímka, znázorňující závislost dráhy na času pro antilopu bude tečnou k parabole, která znázorňuje závislost dráhy geparda na čase na posledním úseku jeho běhu.



Obr. R2

3 body

Přesnou dobu dostižení geparda v tomto případě určíme z rovnosti velikostí rychlostí. Označme t čas od okamžiku, kdy gepard začíná zpomalovat do vyrovnání rychlostí. Bude platit

$$v_a = v_g - at = v_g - \frac{v_g}{t_1}t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_g - v_a}{v_g}t_1,$$

a celková doba běhu obou zvířat do dostižení antilopy gepardem bude $(t_1 + t_2 + t) = 11{,}3$ s.

2 body

Tuto dobu můžeme určit i z grafu závislosti rychlostí na času.

Gepard do dostižení antilopy uběhne vzdálenost

$$s_g = \frac{1}{2}v_g t_1 + v_g t_2 + v_g t - \frac{1}{2}\frac{v_g}{t_1}t^2 = \frac{1}{2}v_g t_1 + v_g t_2 + v_g \frac{v_g - v_a}{v_g}t_1 - \frac{1}{2}\frac{v_g}{t_1}\left(\frac{v_g - v_a}{v_g}\right)^2 t_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}v_g t_1 + v_g t_2 + (v_g - v_a)\, t_1 - \frac{1}{2}\frac{(v_g - v_a)^2}{v_g}t_1 = 304 \text{ m}.$$

Antilopa uběhne do střetu s gepardem vzdálenost

$$s_a = v_a\,(t_1 + t_2 + t) = v_a\left(t_1 + t_2 + \frac{v_g - v_a}{v_g}t_1\right) = 252 \text{ m}.$$

Má-li gepard antilopu dostihnout, musí být na počátku jeho rozbíhání antilopa ve vzdálenosti nejvýše 52 m. **3 body**

I tuto část úlohy můžeme řešit graficky. Nakreslíme přímku procházející body (0,100) a (10,220). Pak sestrojíme rovnoběžku, která se bude dotýkat křivky, znázorňující závislost dráhy geparda na času a její průsečík se svislou osou bude hledaná počáteční vzdálenost.

2.a) Označme $V = 2{,}0$ l, $V_1 = 1{,}7$ l. Vařič dodává teplo, které slouží k ohřátí vody na bod varu

$$\eta P_{\max}\tau = m_1 c_1\,(t_2 - t_1) + V\rho c\,(t_2 - t_1)\,,$$

$$\tau = \frac{m_1 c_1\,(t_2 - t_1) + V\rho c\,(t_2 - t_1)}{\eta P_{\max}} =$$

$$= \frac{0{,}7 \cdot 450 \cdot 82 + 0{,}002 \cdot 1\,000 \cdot 4\,200 \cdot 82}{0{,}8 \cdot 1\,200}\text{ s} \doteq 740 \text{ s} \cong 12{,}4 \text{ minuty}.$$

2 body

b) Spotřeba elektrické energie bude

$$E = P_{\max}\tau + P_{\min}\tau_1 = 1\,200 \text{ W} \cdot 744 \text{ s} + 200 \text{ W} \cdot 600 \text{ s} = 1{,}013 \text{ MJ} = 0{,}28 \text{ kWh}.$$

2 body

c) Zahřátí vody v konvici trvá dobu

$$\tau_3 = \frac{V_1 \rho c\,(t_2 - t_1)}{\eta_1 P_1} = \frac{0{,}001\,7 \cdot 1\,000 \cdot 4\,200 \cdot 82}{0{,}9 \cdot 2\,200}\text{s} \doteq 300 \text{ s},$$

zahřátí hrnce se zbytkem vody trvá

$$\tau_4 = \frac{m_1 c_1 (t_2 - t_1) + (V - V_1)\rho c (t_2 - t_1)}{\eta P_{\max}} =$$

$$= \frac{0{,}7 \cdot 450 \cdot 82 + 0{,}000\,3 \cdot 1\,000 \cdot 4\,200 \cdot 82}{0{,}8 \cdot 1\,200} \text{ s} = 135 \text{ s}.$$

Voda v hrnci vaří dříve, celkem bude tedy zahřívání vody před vložením polštářků trvat dobu

$$\tau_3 = 296 \text{ s} \cong 5 \text{ min}.$$

Spotřeba elektrické energie bude

$$E_1 = P_1\tau_3 + P_{\max}\tau_3 + P_{\min}\tau_1 = 2\,200 \text{ W} \cdot 296 \text{ s} + 1\,200 \text{ W} \cdot 296 \text{ s} + 200 \text{ W} \cdot 600 \text{ s} =$$

$$= 1{,}13 \text{ MJ} = 0{,}31 \text{ kWh}$$

a je tedy vyšší než bez použití konvice, protože se voda v hrnci zbytečně po dobu $(\tau_3 - \tau_4)$ při varu intenzivně vypařuje. **3 body**

d) Doba zahřívání bude nejkratší, bude-li zahřívání v konvici a v hrnci trvat stejnou dobu.

$$\tau_3' = \frac{V_1'\rho c (t_2 - t_1)}{\eta_1 P_1} = \tau_4' = \frac{m_1 c_1 (t_2 - t_1) + (V - V_1')\rho c (t_2 - t_1)}{\eta P_{\max}}$$

$$V_1'\rho c \eta P_{\max} = [m_1 c_1 + (V - V_1')\rho c]\, \eta_1 P_1 \quad \Rightarrow \quad V_1' = \frac{m_1 c_1 + V\rho c}{\rho c\left(1 + \dfrac{\eta P_{\max}}{\eta_1 P_1}\right)} =$$

$$= \frac{0{,}7 \text{ kg} \cdot 450 \ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}} + 0{,}002 \text{ m}^3 \cdot 1\,000 \ \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 4\,200 \ \dfrac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}}{1\,000 \ \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 4\,200 \ \dfrac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \left(1 + \dfrac{0{,}8 \cdot 1\,200}{0{,}9 \cdot 2\,200}\right)} = 1{,}40 \text{ l}.$$

Dá-li Radim do konvice 1,4 l vody a 0,6 l vody dá do hrnce, bude zahřívání trvat nejkratší dobu, a sice

$$\tau_3' = \tau_4' = \frac{V_1'\rho c (t_2 - t_1)}{\eta_1 P_1} = \frac{0{,}001\,4 \cdot 1\,000 \cdot 4\,200 \cdot 82}{0{,}9 \cdot 2\,200} \text{ s} = 244 \text{ s} \cong 4 \text{ min}.$$

Spotřeba energie bude

$$E_2 = P_1\tau_3' + P_{\max}\tau_3' + P_{\min}\tau_1 = 2\,200 \text{ W} \cdot 244 \text{ s} + 1\,200 \text{ W} \cdot 244 \text{ s} + 200 \text{ W} \cdot 600 \text{ s} =$$

$$= 950 \text{ kJ} = 0{,}26 \text{ kWh}.$$

Spotřeba je menší než bez použití konvice, protože konvice má větší účinnost tepelného přenosu. **3 body**

3.a) Podle ZZE se potenciální energie tíhová koule spotřebuje na vykonání práce proti odporové síle a proti vztlakové síle. Platí

$$mg(H + h) = F \cdot h + V\rho g h.$$

Pro odporovou sílu je

$$F=\frac{mg(H+h)-V\rho gh}{h}=\frac{0{,}25\cdot 10\cdot 2{,}5-10^{-3}\cdot 1{,}0\cdot 10^{3}\cdot 10\cdot 0{,}5}{0{,}5}\,\mathrm{N}=2{,}5\,\mathrm{N}.$$

Pro vztlakovou sílu platí

$$F_{vz}=V\rho g=10^{-3}\cdot 1{,}0\cdot 10^{3}\cdot 10=10\ \mathrm{N}=4F.$$

Vztlaková síla je tedy 4× větší než síla odporová. **3 body**

b) Vyjdeme opět ze ZZE. Část původní potenciální energie tíhové se spotřebuje na vykonání práce proti odporové síle. Práce při překonávání vztlakové síly při pohybu dolů je stejná, jako práce, kterou vykoná vztlaková síla při pohybu ve vodě vzhůru, nemusíme s ní tedy počítat.

$$mg(H+h)=2F\cdot h+mg\,(h+h_1)\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad h_1=\frac{mg(H+h)-2Fh-mgh}{mg}=\frac{mH-2\,[m(H+h)-V\rho h]}{m}=$$

$$=\frac{2V\rho h}{m}-2h-H=2h\left(\frac{V\rho}{m}-1\right)-H=1{,}0\ \mathrm{m}.$$

4 body

c) Odporová síla se nezměnila, stejně tak síla vztlaková. Koule padá z výšky h_1 a potopí se do hloubky y. Nyní

$$mg\,(y+h_1)=Fy+V\rho gy\quad\Rightarrow\quad y=\frac{mgh_1}{F+V\rho g-mg}=0{,}25\ \mathrm{m}.$$

Podle zákona zachování energie

$$mg\,(y+h_1)=2Fy+mg\,(y+h_2)\,,$$

$$h_2=\frac{2V\rho y}{m}-2y-h_1=2y\left(\frac{V\rho}{m}-1\right)-h_1=0{,}5\ \mathrm{m}.$$ **3 body**

4.a) Podle momentové věty před automobilem (osa je osou přední nápravy):

$$m_1g(l_1\cos\alpha-1{,}5b)=Mgb\quad\Rightarrow\quad m_1=\frac{Mb}{(l_1\cos\alpha-1{,}5b)}=7{,}4\ \mathrm{t},$$

za automobilem (osa je osou zadní nápravy)

$$m_1g(l_1\cos\alpha-0{,}5b)=Mgb\quad\Rightarrow\quad m_1'=\frac{Mb}{(l_1\cos\alpha-0{,}5b)}=4{,}9\ \mathrm{t}.$$

3 body

b) Podmínka rovnováhy nyní bude (na ose otáčení leží levá kola):

$$m_2g(l_1\cos\alpha\ \sin\varphi-0{,}5b)=Mg\frac{b}{2}\quad\Rightarrow\quad m_2=\frac{Mb}{2(l_1\cos\alpha\sin\varphi-0{,}5b)}=5{,}9\ \mathrm{t}.$$

2 body

c) Podmínka rovnováhy se změní na:

$$m_3 g(l\cos\alpha - 0{,}5b) = Mg\frac{b}{2} \quad \Rightarrow \quad m_3 = \frac{Mb}{2(l\cos\alpha - 0{,}5b)} = 1{,}1\ \text{t}.$$

2 body

d) Budeme-li břemeno zvedat se zrychlením, bude břemeno na rameno autojeřábu působit sílou

$$F = m_4(g + a).$$

Z podmínek rovnováhy musíme vyjádřit zrychlení. Přitom můžeme použít hmotnosti vypočítané v případech a) až c);

$$m_1 g = m_4(g + a) \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{m_1 - m_4}{m_4} g = 63\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2},$$

$$a_1' = \frac{m_1' - m_4}{m_4} g = 38\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2},$$

$$a_2 = \frac{m_2 - m_4}{m_4} g = 48\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2},$$

$$a_3 = \frac{m_3 - m_4}{m_4} g = 0{,}98\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

3 body

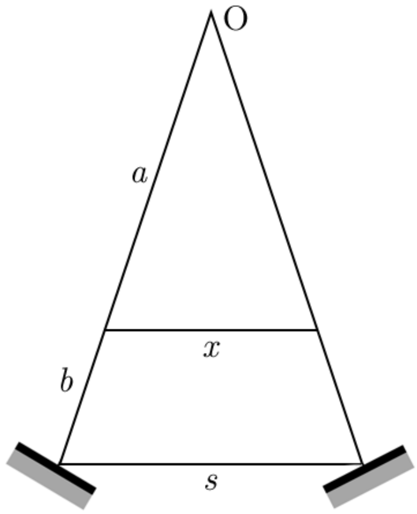
5.a) Zvolíme-li v prověšené pavučině libovolný trojúhelník, kde základnu s tvoří body úchytu pavučiny a x je délka příčného vlákna mezi dvěma sousedními radiálními vlákny (obr. R3).

Pro vzdálenost x platí:

$$x = \frac{a}{a + b} s. \tag{1}$$

Části vlákna se prodlužují, jejich délka je úměrná počáteční délce ($a_1 = \gamma a$; $b_1 = \gamma b$), ale po dosazení do (1) vidíme, že vzdálenost x se nemění, to znamená, že příčná vlákna nemají na prohnutí pavučiny vliv.

2 body

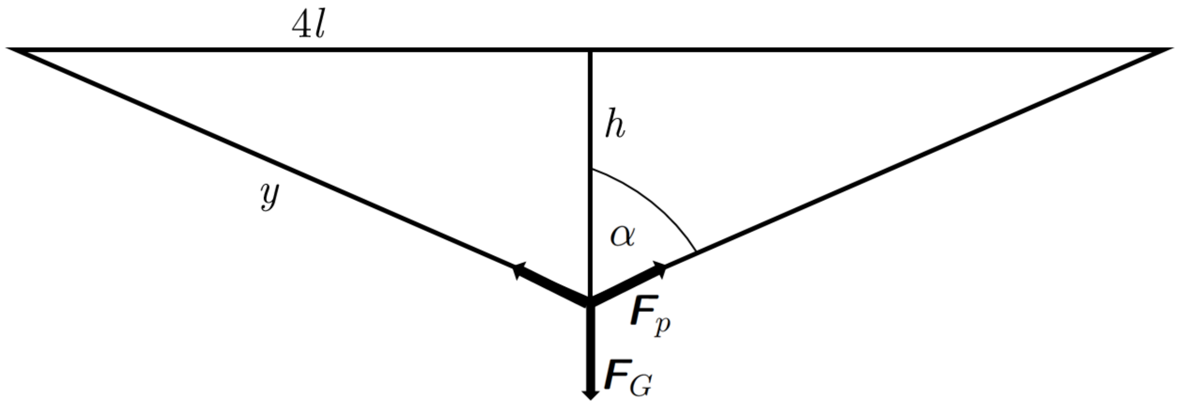


Obr. R3

b) Protože příčná vlákna nemají na prohnutí pavučiny vliv, můžeme se zabývat pouze prodlužováním radiálních vláken.

Má-li část vlákna délku l a tuhost k, pak se silou velikosti F prodlouží o $\Delta x = \frac{F}{k}$. Radiální vlákno se skládá ze 4 takových dílů, proto se silou $\boldsymbol{F}$ prodlouží o $\Delta X = 4\Delta x$. Celková tuhost radiálního vlákna pak bude (podobně jako u čtyř sériově zavěšených pružin)

$$K = \frac{F}{\Delta X} = \frac{F}{4\Delta x} = \frac{k}{4}.$$



Obr. R4

Uprostřed pavučiny v bodě O působí pavouk na pavučinu svou tíhou, která je v rovnováze se šesti silami pružnosti F_p (obr. R4).
Z rovnováhy sil plyne

$$mg = 6F_p \cos\alpha, \tag{2}$$

pro sílu pružnosti pak

$$F_p = K(y - 4l) = \frac{k}{4}\left(\sqrt{(4l)^2 + h^2} - 4l\right).$$

Protože

$$\cos\alpha = \frac{h}{y} = \frac{h}{\sqrt{(4l)^2 + h^2}},$$

můžeme dosadit do vztahu (2)

$$mg = 6\frac{k}{4}\left(\sqrt{(4l)^2 + h^2} - 4l\right)\frac{h}{\sqrt{(4l)^2 + h^2}}.$$

Odtud plyne

$$k = \frac{2mg\sqrt{(4l)^2 + h^2}}{3h\left(\sqrt{(4l)^2 + h^2} - 4l\right)} = 1{,}7\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}.$$

5 bodů

c) Vlákno délky l o tuhosti k se silou pružnosti F_p prodlouží o Δx. Modul pružnosti v tahu pak bude podle Hookova zákona

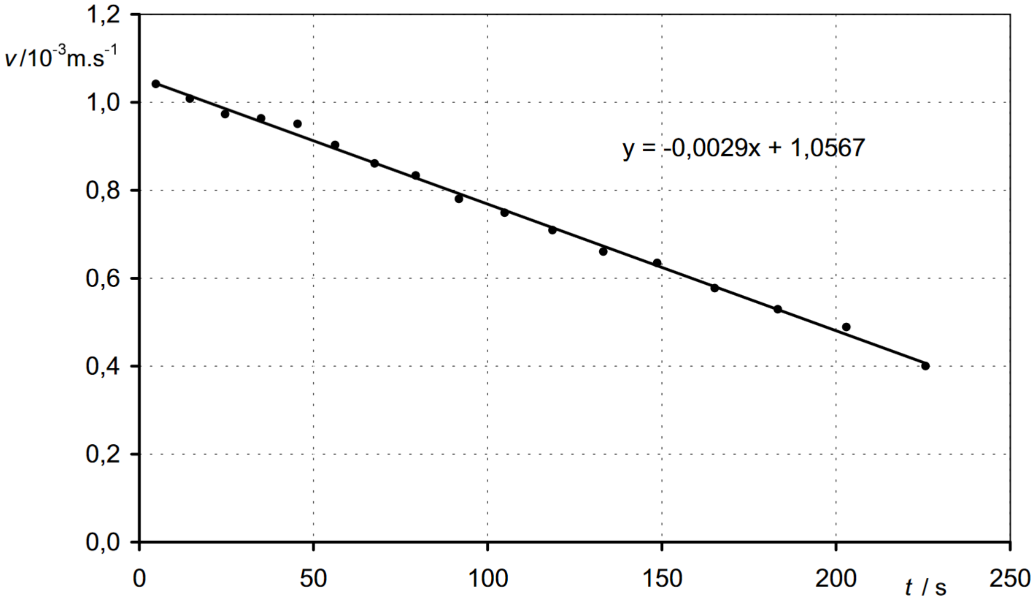
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F_p}{S\frac{\Delta x}{l}} = \frac{4kl\Delta x}{\pi d^2 \Delta x} = \frac{4kl}{\pi d^2} = 960\ \mathrm{GPa}.$$

3 body

6. Naměřené hodnoty a jejich zpracování je v tabulce. Při průchodu posledními dvěma ryskami již voda stékala po stěně, proto příslušné časy nebyly měřeny.

i	h_i / m	t_{i1} / s	t_{i2} / s	t_{i3} / s	t_{i4} / s	t_{i5} / s	$\bar{t}_i$ / s	$\Delta t_i = \bar{t}_i - \bar{t}_{i-1}$ / s	$t_i = \frac{\bar{t}_i + \bar{t}_{i-1}}{2}$ / s	$v_i = \frac{\Delta h}{\Delta t_i}$ / 10^{-3} m·s^{-1}
0	0,20	—	—	—	—	—	0	—	—	—
1	0,19	9,7	9,6	9,3	9,8	9,6	9,6	9,6	4,8	1,042
2	0,18	19,8	19,7	19,0	19,3	19,8	19,5	9,9	14,6	1,008
3	0,17	30,0	29,8	29,5	29,8	29,9	29,8	10,3	24,7	0,973
4	0,16	40,8	40,3	39,4	40,3	40,1	40,2	10,4	35,0	0,963
5	0,15	51,5	50,8	50,3	50,3	50,6	50,7	10,5	45,4	0,951
6	0,14	61,8	62,0	61,1	61,8	62,2	61,8	11,1	56,2	0,903
7	0,13	73,5	73,7	73,0	73,1	73,7	73,4	11,6	67,6	0,861
8	0,12	85,6	85,7	85,1	85,2	85,4	85,4	12,0	79,4	0,833
9	0,11	98,1	98,3	97,8	98,2	98,7	98,2	12,8	91,8	0,780
10	0,10	111,3	112,4	110,8	111,7	111,7	111,6	13,4	104,9	0,749
11	0,09	125,8	125,9	124,7	125,6	126,4	125,7	14,1	118,6	0,709
12	0,08	141,2	141,2	139,6	140,9	141,2	140,8	15,1	133,3	0,661
13	0,07	156,7	156,6	155,8	156,6	157,2	156,6	15,8	148,7	0,635
14	0,06	174,1	174,3	173,1	174,0	174,0	173,9	17,3	165,2	0,577
15	0,05	192,7	193,1	192,3	192,7	193,2	192,8	18,9	183,4	0,529
16	0,04	213,2	213,8	212,9	213,0	213,4	213,3	20,5	203,0	0,489
17	0,03	238,1	237,9	237,2	239,1	238,9	238,2	25,0	225,8	0,400
18	0,02	—	—	—	—	—	—	—	—	—
19	0,01	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Hodnoty z posledních dvou sloupců tabulky jsou vyneseny do grafu závislosti okamžité rychlosti pohybu hladiny na čase a sestrojenými body je proložena přímka.



Obr. R5

Závěr: Z grafu lze usuzovat, že pohyb hladiny byl rovnoměrně zpomalený. Absolutní hodnota směrnice přímky udává velikost zrychlení $a = 0{,}0029\ \mathrm{mm/s^2}$.

7.a) Počáteční hydrostatický tlak u dna nádob

$$p_0 = h\rho_v g = 0{,}20\ \text{kPa}.$$ **1 bod**

b) Sloupec oleje o celkové výšce $6h_1$ má stejnou tíhu jako sloupec vody o výšce $\frac{6\rho h_1}{\rho_v}$. Přilití oleje tak odpovídá ekvivalentnímu zvýšení hladiny vody o

$$\Delta H = \frac{6\rho h_1}{4\rho_v} = 2{,}7\ \text{cm}$$

v každé nádobě. Hydrostatický tlak u dna se tedy zvýší o

$$\Delta p = \rho_v g \Delta H = \frac{3}{2}\rho g h_1 = 0{,}26\ \text{kPa}.$$ **5 bodů**

c) Označme Δh_{vi} změnu hladiny vody v i-té nádobě po přilití oleje, $i = 1, 2, 3, 4$. Celková změna tlaku u dna každé nádoby je $\Delta p = \rho_v g \Delta h_{vi} + \rho g h_i$. Po dosazení za Δp z řešení v b) obdržíme

$$\Delta h_{\text{vi}} = \frac{\rho}{\rho_v}\left(\frac{3}{2}h_1 - h_i\right),\ i = \ 1, 2, 3, 4.$$

Pro jednotlivé trubice

$$\Delta h_{v1} = \frac{\rho}{2\rho_v}h_1 = 0{,}9\ \text{cm}, \quad \Delta h_{v2} = -\frac{\rho}{2\rho_v}h_1 = -0{,}9\ \text{cm},$$

$$\Delta h_{v3} = -\frac{3\rho}{2\rho_v}h_1 = 2{,}7\ \text{cm}, \quad \Delta h_{v4} = \frac{3\rho}{2\rho_v}h_1 = 2{,}7\ \text{cm}.$$ **4 body**

(Záporné znaménko odpovídá poklesu hladiny.)