Řešení úloh krajského kola 63. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie C

Úlohy navrhl J. Thomas

1. a) Průměrná rychlost na obou nekvalitních úsecích:

$$v_p = \frac{2l}{t_2 - t_1}.$$

1 bod

b) Počáteční rychlost $v_0 = n_1 v_1 = n_2 v_2$. Rozdíl časů

$$t_2 - t_1 = \frac{l}{v_1} + \frac{l}{v_2} = \frac{l}{v_0} n_1 + \frac{l}{v_0} n_2 = (n_1 + n_2) \frac{l}{v_0}.$$

Odtud

$$v_0 = \frac{n_1 + n_2}{t_2 - t_1} l.$$

2 body

c) Na konec prvního úseku přijede automobil v čase

$$t_3 = t_1 + \frac{l}{v_1} = t_1 + \frac{n_1}{n_1 + n_2} (t_2 - t_1).$$

2 body

d) Ze ZZE určíme počáteční rychlost kotouče:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + (f_1 + f_2) mgl.$$

Odtud

$$v_0 = \sqrt{v_2^2 + 2 (f_1 + f_2) gl}.$$

2 body

Na konci prvního úseku má kotouč rychlost v_1, podle ZZE

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + f_2 mgl.$$

Odtud

$$v_1 = \sqrt{v_2^2 + 2 f_2 gl}.$$

1 bod

e) K určení průměrné rychlosti musíme určit nejprve doby pohybu kotouče po nekvalitním ledě. Pro pohyb rovnoměrně zpomalený na prvním úseku

$$v_1 = v_0 - f_1 g t_1.$$

Odtud

$$t_1 = \frac{v_0 - v_1}{f_1 g}.$$

Podobně

$$t_2 = \frac{v_1 - v_2}{f_2 g}.$$

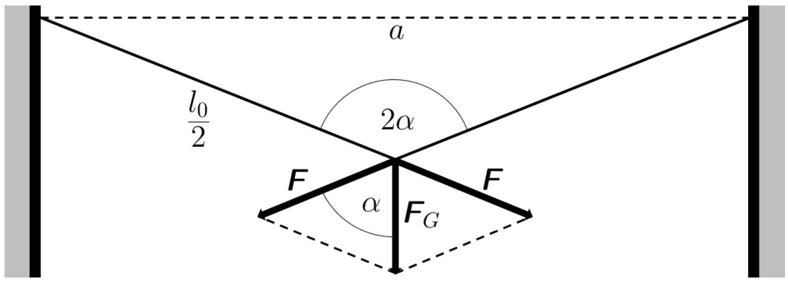
Průměrná rychlost

$$v_p = \frac{2l}{t_1 + t_2} = \frac{2lgf_1 f_2}{(v_0 - v_1) f_2 + (v_1 - v_2) f_1}.$$

2 body

2. a) Hmotnost samotného lana je $m_1 = \rho l_0 \pi \frac{d^2}{4} = 6{,}86$ kg. Napjaté poloviny lana svírají úhel 2α (obr. R1). Pro úhel α platí

$$\sin\alpha = \frac{a}{l} \cong \frac{a}{l_0}.$$



Obr. R1

Z obrázku plyne

$$F = \frac{F_G}{2\cos\alpha} = \frac{(m+m_1)\,g}{2\sqrt{1-\left(\frac{a}{l_0}\right)^2}} = \frac{\left(m + \rho l_0 \pi \frac{d^2}{4}\right) g}{2\sqrt{1-\left(\frac{a}{l_0}\right)^2}} = 238 \text{ N}.$$

2 body

b) Lano je napínáno silou $\boldsymbol{F}$. Pro relativní prodloužení lana platí

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{4F}{\pi d^2 E} = \frac{2\left(m + \rho l_0 \pi \frac{d^2}{4}\right) g}{\pi d^2 E \sqrt{1-\left(\frac{a}{l_0}\right)^2}} = 1{,}4\cdot 10^{-5} = 1{,}4\cdot 10^{-3}\ \%$$

Prodloužení lana je opravdu zanedbatelné. **2 body**

c) Lano se prodlouží o $\Delta l = l_1 - l_0 = l_0 \alpha \Delta t = 5{,}1$ mm. **2 body**

d) Na ohřátí lana je třeba dodat teplo

$$Q = mc\Delta t = \rho l_0 \pi \frac{d^2}{4} c \Delta t = 117 \text{ kJ}.$$

2 body

e) Lampu můžeme považovat za matematické kyvadlo s dobou kmitu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

kde délka kyvadla $l = \sqrt{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$. Pro periodu platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{g}} = 3{,}2 \text{ s}.$$ **2 body**

3. a) Pro maximální výšku hodu platí $H = \dfrac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$. Pro počáteční rychlosti obou vrhů tedy bude

$$v_{01} = \frac{\sqrt{2Hg}}{\sin \alpha_1} = 12{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \text{ a } v_{02} = \frac{\sqrt{2Hg}}{\sin \alpha_2} = 10{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

2 body

b) Vzdálenost míst odhodu je

$$L = l_1 + l_2 = \frac{v_{01}^2 \sin 2\alpha_1}{2g} + \frac{v_{02}^2 \sin 2\alpha_2}{2g} = 13{,}7\ \mathrm{m}.$$

3 body

c) V místě srážky má první koule rychlost velikosti $v_1 = v_{01} \cos \alpha_1$ a druhá koule rychlost velikosti $v_2 = v_{02} \cos \alpha_2$ v opačném směru. Podle ZZH

$$mv_1 - mv_2 = 2mv.$$

Odtud

$$v = \frac{v_1 - v_2}{2} = \frac{v_{01} \cos \alpha_1 - v_{02} \cos \alpha_2}{2} = \sqrt{\frac{Hg}{2}} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_2} \right) = 1{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Protože koule prvního chlapce má větší hybnost, bude směr rychlosti po srážce vodorovný, směrem ke druhému chlapci. **3 body**

d) Místo dopadu spojené koule bude ve vzdálenosti

$$x = l_2 - v\sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{v_{02}^2 \sin 2\alpha_2}{2g} - H \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_2} \right) =$$
$$= \frac{2H}{\operatorname{tg} \alpha_2} - \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha_1} + \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha_2} = H \left(\frac{3}{\operatorname{tg} \alpha_2} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} \right) = 4{,}0\ \mathrm{m}$$

před druhým chlapcem. **2 body**

4. a) Označme vzdálenost $|\mathrm{OA}| = x$ a objem koule V. Na kouli ponořenou v petroleji působí jednak síla tíhová, jednak síla vztlaková. Z podmínky rovnováhy na páce můžeme napsat

$$m_1 l_1 g = \left(V \rho_{\mathrm{Al}} g - \frac{V}{2} \rho_o g \right) x \quad \Rightarrow \quad m_1 l_1 = Vx \left(\rho_{\mathrm{Al}} - \frac{\rho_o}{2} \right). \tag{1}$$

Při zavěšení tělesa o hmotnosti m_2 do bodu C bude podmínka rovnováhy

$$m_2 l_2 g = \left(V \rho_{\mathrm{Al}} g - \frac{V}{2} \rho_v g \right) x \quad \Rightarrow \quad m_2 l_2 = Vx \left(\rho_{\mathrm{Al}} - \frac{\rho_v}{2} \right). \tag{2}$$

Dělením rovnic (2) a (1) dostaneme

$$\frac{m_2 l_2}{m_1 l_1} = \frac{\rho_{\mathrm{Al}} - \dfrac{\rho_v}{2}}{\rho_{\mathrm{Al}} - \dfrac{\rho_o}{2}} \quad \Rightarrow \quad m_2 = m_1 \frac{l_1}{l_2} . \frac{2\rho_{\mathrm{Al}} - \rho_v}{2\rho_{\mathrm{Al}} - \rho_o} = 1{,}0\ \mathrm{kg}.$$

3 body

b) Napíšeme podmínku rovnováhy

$$m_2 l_3 = Vx\left(\rho_{\mathrm{Al}} - \frac{\rho_v}{n}\right),$$

kde n je hledaná část objemu koule. Porovnáním s rovnicí (2)

$$\frac{l_3}{l_2} = \frac{\rho_{\mathrm{Al}} - \frac{\rho_v}{n}}{\rho_{\mathrm{Al}} - \frac{\rho_v}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{l_3}{l_2}\left(\rho_{\mathrm{Al}} - \frac{\rho_v}{2}\right) = \left(\rho_{\mathrm{Al}} - \frac{\rho_v}{n}\right),$$

$$\frac{\rho_v}{n} = \rho_{\mathrm{Al}} - \frac{l_3}{l_2}\left(\rho_{\mathrm{Al}} - \frac{\rho_v}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\rho_v}{\rho_{\mathrm{Al}} - \frac{l_3}{l_2}\left(\rho_{\mathrm{Al}} - \frac{\rho_v}{2}\right)} = \frac{2}{3}.$$

Koule bude v tomto případě ponořena ve vodě ze dvou třetin. **3 body**

c) Protože objem koule je $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi d^3$, bude hmotnost koule

$$m = \frac{1}{6}\pi d^3 \rho_{\mathrm{Al}} = 5{,}8\ \mathrm{kg}.$$

2 body

d) Nyní můžeme z rovnice (1) vyjádřit

$$x = \frac{m_1 l_1}{V\left(\rho_{\mathrm{Al}} - \frac{\rho_o}{2}\right)} = \frac{m_1 l_1}{\frac{1}{6}\pi d^3\left(\rho_{\mathrm{Al}} - \frac{\rho_o}{2}\right)} = \frac{12 m_1 l_1}{\pi d^3\left(2\rho_{\mathrm{Al}} - \rho_o\right)}.$$

Délka páky pak bude

$$l = x + l_2 = \frac{12 m_1 l_1}{\pi d^3\left(2\rho_{\mathrm{Al}} - \rho_o\right)} + l_2 = 1{,}33\ \mathrm{m}.$$

2 body