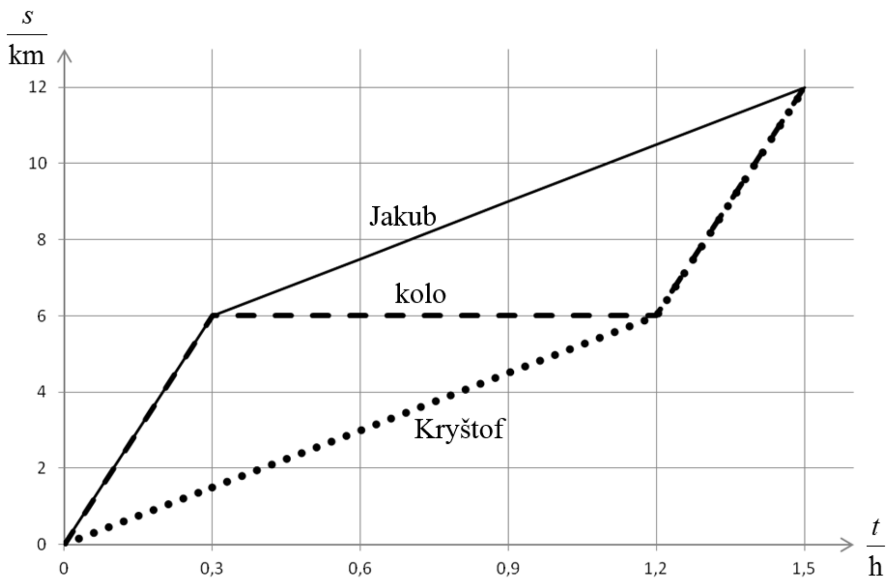
Řešení úloh 1. kola 63. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

Autor úloh: J. Jírů

1. a) Mají-li dorazit do cíle ve stejném okamžiku, musí každý na kole ujet stejnou vzdálenost a každý ujít pěšky stejnou vzdálenost. Proto Jakub musí kolo odložit v polovině cesty. Každý z chlapců ujde pěšky 6 km a ujede na kole také 6 km.

Doba chůze je $\dfrac{6\ \mathrm{km}}{5\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}} = 1{,}2\ \mathrm{h} = 72\ \mathrm{min}.$

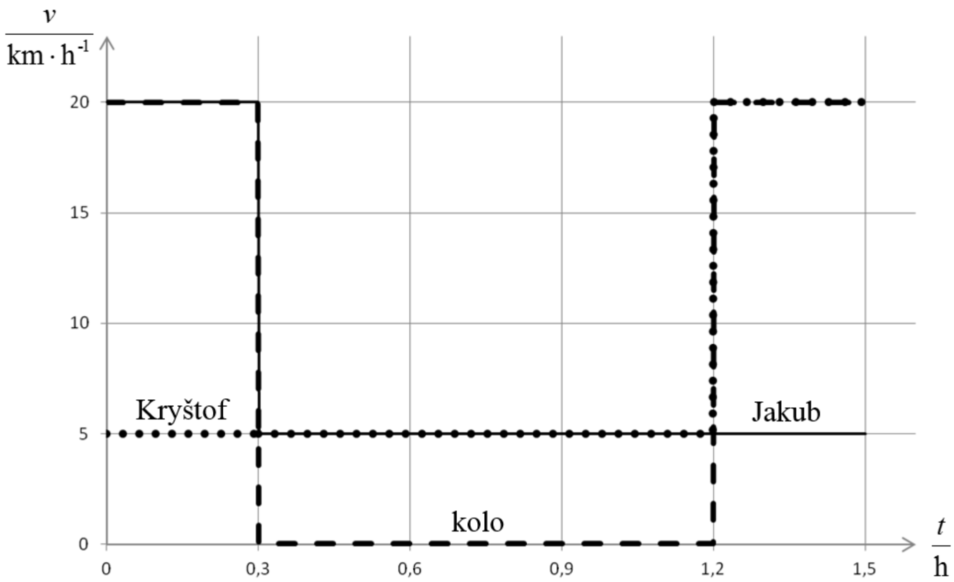
Doba jízdy na kole je $\dfrac{6\ \mathrm{km}}{20\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}} = 0{,}3\ \mathrm{h} = 18\ \mathrm{min}.$



Obr. R1

4 body

b)



Obr. R2

3 body

c) $$t = t_1 + t_2 = \frac{\frac{s}{2}}{v_1} + \frac{\frac{s}{2}}{v_2} = \frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2} =$$

$$= \frac{s\,(v_1 + v_2)}{2v_1v_2} = \frac{12\,(9 + 22)}{2 \cdot 9 \cdot 22}\ \mathrm{h} = 0{,}94\ \mathrm{h} = 56\ \mathrm{min}.$$

3 body

2.a) Sedačka opsala rovnoměrně zrychleným pohybem z klidu za čas T_1 dráhu $2\pi r$ a za čas t_1 dvojnásobnou dráhu $4\pi r$. Proto platí

$$2\pi r = \frac{1}{2}aT_1^2, \tag{1}$$

$$4\pi r = \frac{1}{2}at_1^2, \tag{2}$$

$$v = at_1. \tag{3}$$

Máme tak tři rovnice s třemi neznámými a, T_1, v. Z rovnice (2) vyjádříme zrychlení

$$a = \frac{8\pi r}{t_1^2}.$$

Dosazením do rovnice (3) dostaneme velikost konečné rychlosti

$$v = at_1 = \frac{8\pi r}{t_1^2} \cdot t_1 = \frac{8\pi r}{t_1} = \frac{8\pi \cdot 3{,}1}{18}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 4{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$ **3 body**

Z rovnice (1) vyjádříme hledaný čas T_1a opět dosadíme výraz pro zrychlení:

$$T_1 = \sqrt{\frac{4\pi r}{a}} = \sqrt{\frac{4\pi r}{\frac{8\pi r}{t_1^2}}} = \frac{t_1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}t_1 = 12{,}7\ \mathrm{s}.$$ **2 body**

b) Doba jedné otočky rovnoměrného pohybu neboli perioda je

$$T = \frac{2\pi r}{v},$$

kde $v = \frac{8\pi r}{t_1}$ je již známá obvodová rychlost. Dosazením dostaneme

$$T = \frac{2\pi r}{\frac{8\pi r}{t_1}} = \frac{t_1}{4} = 4{,}5\ \mathrm{s}.$$ **2 body**

c) Pro rovnoměrně zpomalený pohyb do zastavení platí

$$6\pi r = \frac{1}{2}a' t_2^2,$$

$$v = a' t_2.$$

Vyloučením neznámého zrychlení dostaneme

$$6\pi r = \frac{vt_2}{2}.$$

Z rovnice vyjádříme hledaný čas t_2 a opět použijeme známou obvodovou rychlost:

$$t_2 = \frac{12\pi r}{v} = \frac{12\pi r}{\frac{8\pi r}{t_1}} = \frac{3}{2}t_1 = 27\ \mathrm{s}.$$ **3 body**

3.a) Při stejném sklonu během průjezdu zatáčkou má setrvačná odstředivá síla stejnou velikost $F_\mathrm{s} = ma_\mathrm{d}$. Proto v obou případech průjezdu zůstává stejná velikost dostředivého zrychlení:

$$a_\mathrm{d} = \frac{v_1^2}{r_1} = \frac{v_2^2}{r_2}.$$

Ze vztahu plyne

$$v_2 = v_1\sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = 6{,}3 \cdot \sqrt{\frac{13}{9}}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 7{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$ **3 body**

b) Čas průjezdu po vnitřním oblouku je

$$t_1 = \frac{\pi r_1}{v_1} = \frac{9\pi}{6{,}3}\ \mathrm{s} = 4{,}5\ \mathrm{s}.$$

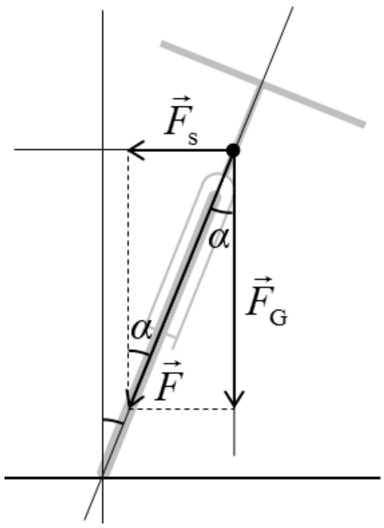
Čas průjezdu po vnějším oblouku je

$$t_2 = \frac{\pi r_2}{v_2} = \frac{\pi r_2}{v_1\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}} = \frac{\pi\sqrt{r_1 r_2}}{v_1} = \frac{\pi\sqrt{9 \cdot 13}}{6{,}3}\ \mathrm{s} = 5{,}4\ \mathrm{s}.$$ **4 body**

c) V soustavě spojené s cyklistou působí v těžišti soustavy cyklisty s kolem tíhová síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$ a setrvačná odstředivá síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{s}$ tak, že vektorová přímka jejich výslednice $\boldsymbol{F}$ protíná vodorovnou vozovku ve spojnici dotykových bodů kol s vozovkou. Pro úhel α odklonu cyklisty od svislého směru platí:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{F_\mathrm{s}}{F_\mathrm{G}} = \frac{\frac{mv_1^2}{r_1}}{mg} = \frac{v_1^2}{gr_1} = 0{,}449\,5 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 24°.$$

3 body



Obr. R3

4.a) Podle zákona zachování mechanické energie je potenciální energie atleta o hmotnosti m v nejvyšší poloze rovna jeho kinetické energii při náběhové rychlosti v. Z rovnice

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2,$$

kde h je výška těžiště atleta v nejvyšší poloze nad polohou těžiště v okamžiku odrazu, plyne

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{9{,}5^2}{2 \cdot 9{,}81}\mathrm{m} = 4{,}60\ \mathrm{m}.$$ **3 body**

b) Předchozí rovnici rozšíříme o vykonanou práci:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + W.$$

Z rovnice dostaneme

$$h = \frac{v^2}{2g} + \frac{W}{mg} = \left(\frac{9{,}5^2}{2 \cdot 9{,}81} + \frac{8}{1 \cdot 9{,}81}\right)\ \mathrm{m} = 5{,}42\ \mathrm{m}. \qquad \textbf{3 body}$$

Poznámka: Formálně lze výsledný vztah napsat ve tvaru $h = \dfrac{1}{g}\left(\dfrac{v^2}{2} + \dfrac{W}{m}\right)$, kde člen $\frac{W}{m} = 8\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}$ udává práci připadající na jednotkovou hmotnost atleta.

c) Hodnota světového rekordu v hale převyšuje naši vypočtenou hodnotou o 76 cm. Provedený výpočet určuje pro dokonalou přeměnu energie pouze změnu výšky těžiště atleta. Ke změně výšky těžiště je třeba přičíst počáteční výšku těžiště atleta nad rozběhovou drahou v okamžiku odrazu a odečíst od ní dosaženou výšku těžiště nad laťkou. Uvážíme-li, že při přechodu přes laťku skokan nechává postupně procházet nohy, trup, hlavu a ruce v jakémsi prohnutí připomínající tvar podkovy, může být v kulminaci výška těžiště nad laťkou v jednotkách centimetrů.

Tato skutečnost dostatečně zdůvodňuje uvedený rozdíl.

(Nutná zmínka o těžišti atleta při odrazu a při přechodu přes laťku.)

2 body

Na druhé straně během samotného letu atleta po uvolnění tyče jeho těžiště opisuje parabolu (jako u šikmého vrhu). To znamená, že ve vodorovném směru má nenulovou složku rychlosti, jíž odpovídá jistá zbytková kinetická energie, kterou atlet nemohl využít k vystoupání do větší výšky. Současně také dochází k částečné přeměně mechanické energie na vnitřní energii. Změna směru pohybu skokana z vodorovného do téměř svislého musí být plynulá, aby se setrvačnost atleta co nejméně přenášela do nárazu tyče vsunuté do skříňky. Proto současně s tímto nárazem atlet začíná tyč ohýbat, čímž se většina jeho kinetické energie přemění na energii pružnosti tyče, která ho při svém zpětném narovnání vynese vzhůru. Tedy k nežádoucí přeměně původní kinetické energie atleta na vnitřní energii dochází především v počátku ohýbání příčným nárazem napnuté paže do tyče.

Samotná tyč nesená atletem se v šikmé poloze spodním koncem ve skříňce nepružně zarazí a atlet s ní zůstává v kontaktu do její svislé polohy. Posoudit možný příspěvek její zbytkové kinetické energie k vynesení atleta vzhůru je mimo naše možnosti.

(Nutná zmínka o vodorovné složce rychlosti během letu skokana a o částečné přeměně mechanické energie na vnitřní energii).

2 body

5.a) Při rovnoměrném pohybu je tahová síla v rovnováze se silami působícími proti pohybu. Tahová síla má na prvním úseku velikost

$$F_1 = F_\mathrm{v} + kv^2 = \left(300 + 1{,}2 \cdot 25^2\right)\ \mathrm{N} = 1\,050\ \mathrm{N},$$

na druhém

$$F_2 = F_\mathrm{v} + kv^2 + pF_\mathrm{G} = F_1 + pF_\mathrm{G} = (1\,050 + 0{,}11 \cdot 13\,000)\ \mathrm{N} = 2\,480\ \mathrm{N}.$$

Výkony pak jsou

$$P_1 = F_1 v = 1\,050 \cdot 25\ \mathrm{W} = 26\ \mathrm{kW},$$

$$P_2 = F_2 v = 2\,480 \cdot 25\ \mathrm{W} = 62\ \mathrm{kW}.$$

Motor automobilu vykonal práci

$$W = F_1 \cdot vt_1 + F_2 s_2 = 1\,050 \cdot 25 \cdot 140\ \mathrm{J} + 2\,480 \cdot 2\,000\ \mathrm{J} =$$

$$= 3{,}68\ \mathrm{MJ} + 4{,}96\ \mathrm{MJ} = 8{,}6\ \mathrm{MJ}.$$

4 body

b) Tahová síla má na prvním úseku velikost

$$F_1' = F_\mathrm{v} + k\left(\frac{v}{2}\right)^2 = \left(300 + 1{,}2 \cdot 12{,}5^2\right)\ \mathrm{N} = 488\ \mathrm{N},$$

na druhém

$$F_2' = F_\mathrm{v} + k\left(\frac{v}{2}\right)^2 + pF_\mathrm{G} = F_1' + pF_\mathrm{G} = (488 + 1\,430)\ \mathrm{N} = 1\,920\ \mathrm{N}.$$

Výkony pak jsou

$$P_1' = F_1' \frac{v}{2} = 488 \cdot 12{,}5\ \mathrm{W} = 6{,}1\ \mathrm{kW},$$

$$P_2' = F_2' \frac{v}{2} = 1\,920 \cdot 12{,}5\ \mathrm{W} = 24\ \mathrm{kW}.$$

Motor automobilu na stejných drahách vykonal práci

$$W' = F_1' \cdot vt_1 + F_2' s_2 = 488 \cdot 25 \cdot 140\ \mathrm{J} + 1\,920 \cdot 2\,000\ \mathrm{J} =$$

$$= 1{,}71\ \mathrm{MJ} + 3{,}84\ \mathrm{MJ} = 5{,}6\ \mathrm{MJ}$$

4 body

c) Potenciální energie automobilu ve Vysoké je

$$E_\mathrm{p} = F_\mathrm{G} h = F_\mathrm{G} p s_2 = 13\,000 \cdot 0{,}11 \cdot 2\,000 = 2{,}9\ \mathrm{MJ}.$$

Porovnáme-li vypočtené hodnoty, dostaneme postupnou nerovnost $E_\mathrm{p} < W' < W$. Obě práce jsou větší než potenciální energie, protože část vykonané práce se spotřebuje na zvýšení vnitřní energie pneumatik a vozovky vlivem valivého odporu a na zvýšení vnitřní energie povrchu automobilu a vzduchu vlivem odporové síly vzduchu. Práce při větší rychlosti je větší, protože s rostoucí rychlostí roste odporová síla.

2 body

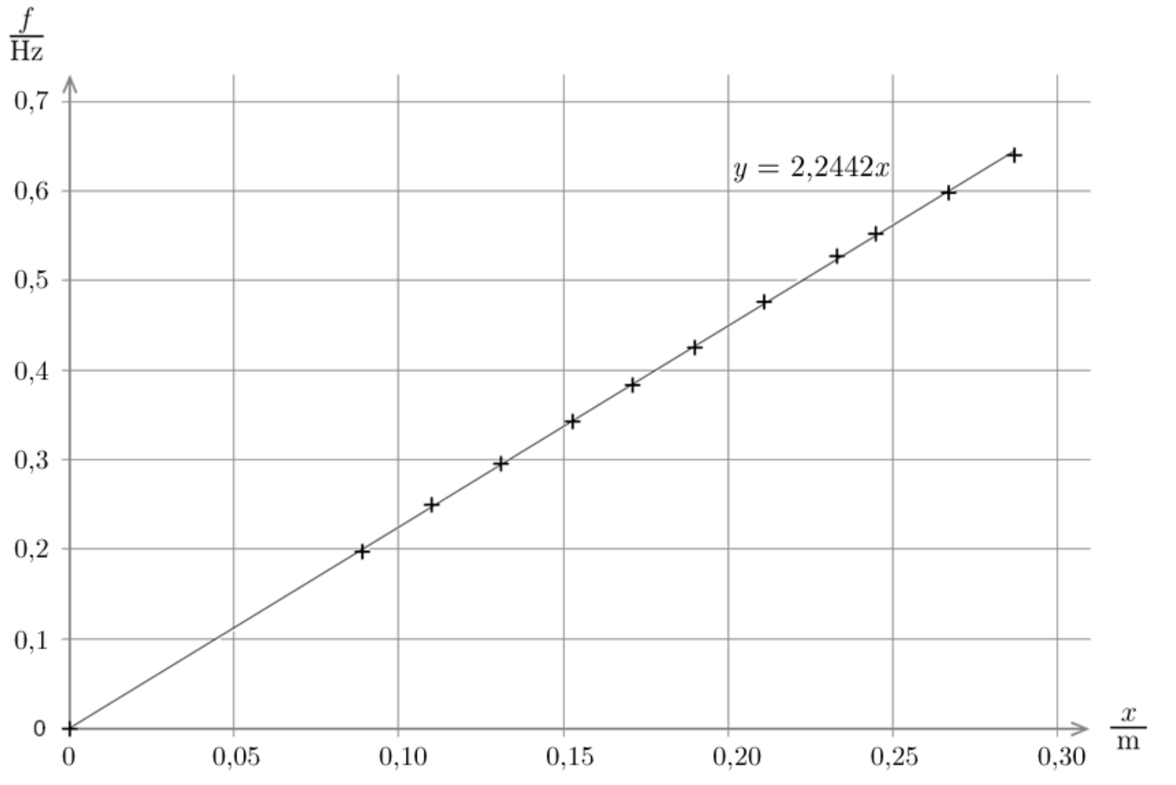
6. Příklady naměřených hodnot:

Výsledky měření pro závitovou tyč o průměru 8 mm: $d = 0{,}287$ m, $l = 1{,}81$ m.

Číslo měření	$\frac{x}{\mathrm{m}}$	$\frac{10T_1}{\mathrm{s}}$	$\frac{10T_2}{\mathrm{s}}$	$\frac{\overline{T}}{\mathrm{s}}$	$\frac{f}{\mathrm{Hz}}$
1	0,287	15,73	15,54	1,56	0,640
2	0,267	16,81	16,67	1,67	0,597
3	0,245	18,11	18,13	1,81	0,552
4	0,233	19,07	18,87	1,90	0,527
5	0,211	21,00	21,03	2,10	0,476
6	0,190	23,49	23,52	2,35	0,425
7	0,171	26,10	26,07	2,61	0,383
8	0,153	29,38	29,10	2,92	0,342
9	0,131	33,80	33,95	3,39	0,295
10	0,111	39,92	40,22	4,01	0,250
11	0,089	50,83	50,47	5,07	0,197
12	0	∞	∞	∞	0

Typ spojnice trendu zvolen lineární a procházející počátkem. Zobrazena rovnice přímé úměrnosti $y = Ax = 2{,}2442\ \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s} \cdot x$, $\{y\} = 2{,}2442\,\{x\}$.

$$A' = \frac{1}{2\pi d}\sqrt{\frac{3g}{l}} = \frac{1}{2\pi \cdot 0{,}287}\sqrt{\frac{3 \cdot 9{,}81}{1{,}81}} = 2{,}236\ \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s} \cong A = 2{,}24\ \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}.$$



Obr. R4

Závěr: Výsledek měření je v souladu s teoretickým předpokladem. Frekvence kmitů závisí přímo úměrně na vzdálenosti závěsů. Konstanta úměrnosti zjištěná z měření kmitů se s přesností na 3 platné číslice shoduje s hodnotou vypočtenou z teoretického vzorce (u třetí platné číslice lze připustit nesoulad o jednotku).

7.a)

$$s_3 = \frac{1}{2}at_3^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2s_3}{t_3^2} = \frac{2\cdot 180}{30^2}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 0{,}40\ \mathrm{m\cdot s^{-2}},$$

$$F = ma = 75\cdot 0{,}4\ \mathrm{N} = 30\ \mathrm{N},$$

$$v_3 = at_3 = 0{,}4\cdot 30\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 12\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

$$P_3 = Fv_3 = 30\cdot 12\ \mathrm{W} = 360\ \mathrm{W},$$

$$P_1 = Fv_1 = Fat_1 = 30\cdot 0{,}4\cdot 10\ \mathrm{W} = 120\ \mathrm{W},$$

$$P_2 = Fv_2 = Fat_2 = 30\cdot 0{,}4\cdot 20\ \mathrm{W} = 240\ \mathrm{W}.$$

3 body

b)

$$s'_1 = \frac{1}{2}at'^2_1 \Rightarrow t'_1 = \sqrt{\frac{2s'_1}{a}} = \sqrt{\frac{2\cdot 60}{0{,}4}}\ \mathrm{s} = 17{,}3\ \mathrm{s},$$

$$v'_1 = at'_1 = 0,4\cdot 17{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 6{,}92\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

$$P'_1 = Fv'_1 = 30\cdot 6{,}92\ \mathrm{W} = 208\ \mathrm{W},$$

$$t'_2 = \sqrt{\frac{2s'_2}{a}} = \sqrt{\frac{2\cdot 120}{0{,}4}}\ \mathrm{s} = 24{,}5\ \mathrm{s},$$

$$v'_2 = at'_2 = 0{,}4\cdot 24{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 9{,}80\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

$$P'_2 = Fv'_2 = 30\cdot 9{,}80\ \mathrm{W} = 294\ \mathrm{W}.$$

3 body

c) $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv_3^2 = \frac{1}{2}\cdot 75\cdot 12^2\ \mathrm{J} = 5\,400\ \mathrm{J}$ nebo $E_\mathrm{k} = W = Fs_3 = 30\cdot 180\ \mathrm{J} = 5\,400\ \mathrm{J}$.

$$\bar{P} = \frac{W}{t_3} = \frac{5\,400}{30}\ \mathrm{W} = 180\ \mathrm{W}.$$

1 bod

d)

Obr. R5

Cyklista vykonal práci rovnou získané kinetické energii, určíme ji jako obsah plochy pod jednotlivými grafy:

$$W = \frac{1}{2}P_3t_3 = \frac{1}{2}\cdot 360\cdot 30\ \mathrm{J} = 5\,400\ \mathrm{J},$$

$$W = \bar{P}t_3 = 180\cdot 30\ \mathrm{J} = 5\,400\ \mathrm{J}.$$

3 body