Řešení úloh krajského kola 63. ročníku Fyzikální olympiády ve školním roce 2021/2022

Kategorie E

Autoři úloh: D. Kluvanec (FO SR, 4), M. Reichelová (FO SR, 2), L. Richterek (3) a J. Thomas (1)

FO63E3-1: Na atletickém oválu

a) Protože známe dobu, za kterou Aleš oběhne ovál (vzdálenost s), můžeme vypočítat velikost rychlosti v. Protože se Aleš pohybuje první polovinu dráhy $s/2$ dvojnásobnou rychlostí než druhou, bude na uběhnutí první poloviny potřebovat poloviční čas t_{A1} než je čas t_{A2} na uběhnutí druhé poloviny, tj. platí $t_{A2} = 2t_{A1}$ a také $t_{A1} + t_{A2} = t_A = 90\,\mathrm{s}$. Celkový čas t_A tedy musíme rozdělit v poměru 1:2, takže $t_{A1} = 30\,\mathrm{s}$, $t_{A2} = 2t_{A1} = 60\,\mathrm{s}$. Pro rychlost v pak vychází

$$v = \frac{\frac{s}{2}}{t_{A2}} = \frac{\frac{400\,\mathrm{m}}{2}}{60\,\mathrm{s}} = \frac{10}{3}\,\mathrm{m/s} \doteq 3{,}333\,3\,\mathrm{m/s} \doteq 3{,}3\,\mathrm{m/s},$$

pro dvojnásobnou rychlost pak dostáváme

$$2v = \frac{20}{3}\,\mathrm{m/s} \doteq 6{,}7\,\mathrm{m/s}.$$

Podobně Bořek za polovinu času $t_B/2$ uběhne rychlostí v poloviční dráhu s_1, než je dráha $s_2 = 2s_1$ připadající za druhou polovinu času $t_B/2$. Protože $s_1+s_2 = s = 400\,\mathrm{m}$, rozdělíme délku oválu v poměru 1:2, neboli $s_1 = 400\,\mathrm{m}/3 \doteq 133{,}33\,\mathrm{m}$ a $s_2 = 266{,}67\,\mathrm{m}$. Pro celkový čas t_B pak vychází

$$t_B = \frac{s_1}{v} + \frac{s_2}{2v} = \frac{133{,}33\,\mathrm{m}}{3{,}333\,3\,\mathrm{m/s}} + \frac{266{,}67\,\mathrm{m}}{2\cdot 3{,}333\,3\,\mathrm{m/s}} = 80\,\mathrm{s}.$$ **3 body**

Poznámka: V principu k výpočtu času t_B nemusíme znát ani velikost rychlosti v, ani délku oválu s; můžeme čas Bořka vyjádřit pouze pomocí Alešova času t_A. Platí totiž

$$t_A = \frac{\frac{s}{2}}{2v} + \frac{\frac{s}{2}}{v} = \frac{3s}{4v}; \qquad \Longrightarrow \qquad v = \frac{3s}{4t_A}.$$

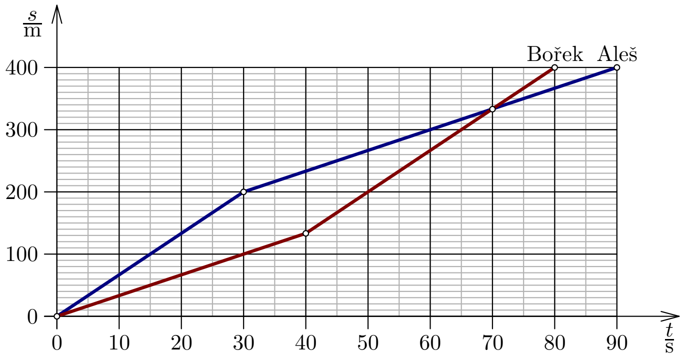
Potom dostaneme pro první úsek dráhy $s_1 = vt_B/2$ a pro druhý $s_2 = 2vt_B/2 = vt_B$ a pro celkovou dráhu $s = s_1 + s_2 = 3vt_B/2$. Odtud

$$t_B = \frac{2s}{3v} = \frac{2s}{3\frac{3s}{4t_A}} = \frac{8}{9}t_A = 80\,\mathrm{s}.$$

Vidíme, že v Bořkově případě je jeho průměrná rychlost rovna $s/t_B = 3v/2 = \frac{1}{2}(v + 2v)$, i z tohoto faktu lze určit Bořkův čas t_B.

b) Příklad grafu je na obr. 1. **2 body**

c) Od místa setkání do místa startu (a cíle) získá Bořek na stejné vzdálenosti náskok $\Delta t = t_A - t_B = 90\,\mathrm{s} - 80\,\mathrm{s} = 10\,\mathrm{s}$. Aleše tedy běžec Bořek doběhne za dobu $t = t_B - \Delta t = 80\,\mathrm{s} - 10\,\mathrm{s} = 70\,\mathrm{s}$ po startu. Tuto hodnotu můžeme odečíst i z grafu na obr. 1. **1 bod**



Obr. 1: K řešení úlohy FO63E3-1

Od místa setkání poběží Aleš ještě po dobu $t_\mathrm{A} - t = 2\Delta t = 20\,\mathrm{s}$ rychlostí v a za tuto dobu uběhne vzdálenost

$$l = v \cdot 2\Delta t = 3{,}333\,3\,\mathrm{m/s} \cdot 20\,\mathrm{s} \doteq 66{,}667\,\mathrm{m} \doteq 67\,\mathrm{m}.$$

K prvnímu setkání běžců tedy došlo ve vzdálenosti asi 67 m před místem startu a cíle (neboli asi 400 m – 67 m = 333 m po dráze od startu). **2 body**

Poznámka: Ke stejnému výsledku dospějeme i z úvahy, že od místa setkání poběží Bořek ještě po dobu $t_\mathrm{B} - t = \Delta t = 10\,\mathrm{s}$ rychlostí $2v$ a za tuto dobu uběhne vzdálenost $l = 2v\Delta t$.

d) Z grafu i z celkových časů je zřejmé, že průměrná rychlost Bořka bude větší. Průměrná rychlost Aleše je

$$v_\mathrm{A} = \frac{s}{t_\mathrm{A}} = \frac{400\,\mathrm{m}}{90\,\mathrm{s}} \doteq 4{,}444\,4\,\mathrm{m/s} \doteq 4{,}4\,\mathrm{m/s} = 16\,\mathrm{km/h},$$

Bořka

$$v_\mathrm{B} = \frac{s}{t_\mathrm{B}} = \frac{400\,\mathrm{m}}{80\,\mathrm{s}} = 5{,}0\,\mathrm{m/s} = 18\,\mathrm{km/h}.$$ **2 body**

FO63E3-2: Ruční praní

a) Teplo Q_1, které přijme studená voda od teplé, se rovná teplu Q_2, které odevzdá teplá voda studené; platí proto $Q_1 = Q_2$, pro hmotnost studené vody $m_1 = \varrho V_1$, hmotnost teplé $m_2 = \varrho V_2$, a tedy

$$m_1 c\,(t - t_1) = m_2 c\,(t_2 - t)\,, \qquad \Longrightarrow \qquad \varrho V_1 c\,(t - t_1) = \varrho V_2 c\,(t_2 - t)\,.$$

Z toho vypočítáme

$$V_2 = \frac{V_1\,(t - t_1)}{t_2 - t} = 3\,\mathrm{litry} \cdot \frac{30\,^\circ\mathrm{C} - 15\,^\circ\mathrm{C}}{80\,^\circ\mathrm{C} - 30\,^\circ\mathrm{C}} = 0{,}90\,\mathrm{litru}$$ **4 body**

b) Studená voda o objemu $V_1 = 3\,\mathrm{l} = 0{,}003\,\mathrm{m}^3$přijme teplo

$$Q = Q_1 = \varrho V_1 c\,(t - t_1) =$$
$$= 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}003\,\mathrm{m^3} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot (30\,^\circ\mathrm{C} - 15\,^\circ\mathrm{C}) = 189\,000\,\mathrm{J} \doteq 190\,\mathrm{kJ}.$$

2 body

c) Hmotnost vody s objemem $V = 5{,}0\,\mathrm{l} = 0{,}005\,\mathrm{m}^3$ je pro dané hodnoty veličin $m = \varrho V = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}005\,\mathrm{m^3} = 5\,\mathrm{kg}$. Aby se voda s teplotou t_1 ohřála na t_2, musí přijmout za čas τ od ohřívače s příkonem P a účinností η teplo

$$Q = mc\,(t_2 - t_1) = \eta P \tau.$$

Odtud vychází hledaný čas

$$\tau = \frac{mc\,(t_2 - t_1)}{\eta P} =$$

$$= \frac{5\,\mathrm{kg} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot (80\,{}^\circ\mathrm{C} - 15\,{}^\circ\mathrm{C})}{0{,}80 \cdot 2\,000\,\mathrm{W}} \doteq 853{,}125\,\mathrm{s} \doteq 850 s.$$

Vyjádřeno v minutách vychází $\tau = 14\,\mathrm{min}\,13\,\mathrm{s}$ nebo po zaokrouhlení $14\,\mathrm{min}\,10\,\mathrm{s}$.

4 body

FO63E3-3: Potopení Titanicu

a) Označme celkový objem ledovce V, objem části nad hladinou V_1 a objem části pod hladinou V_2. Podle Archimédova zákona platí

$$\varrho_\mathrm{l} V g = \varrho_\mathrm{v} V_2 g.$$

Odtud plyne

$$\frac{V_2}{V} = \frac{\varrho_\mathrm{l}}{\varrho_\mathrm{v}} = \frac{920\,\mathrm{kg/m^3}}{1\,020\,\mathrm{kg/m^3}} \doteq 0{,}901\,96 \doteq 90\,\%.$$

Na objem V_1 pak zbývá 10 %. **3 body**

b) Pokud nad hladinou vyčnívá jen 10 % objemu, bude celková výška ledovce $l \doteq 10 l_1 = 1\,000\,\mathrm{stop} = 304{,}8\,\mathrm{m}$. Pro délku $a = 400\,\mathrm{stop} = 121{,}92\,\mathrm{m}$ a šířku $b = 140\,\mathrm{stop} = 42{,}672\,\mathrm{m}$ vychází celkový objem

$$V = abl = 121{,}92\,\mathrm{m} \cdot 42{,}672\,\mathrm{m} \cdot 304{,}8\,\mathrm{m} \doteq 1\,585\,743\,\mathrm{m^3}.$$

Hmotnost ledovce pak odhadneme na

$$m = \varrho_\mathrm{l} V = 920\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 1\,585\,743\,\mathrm{m^3} = 1\,458\,883\,560\,\mathrm{kg} \doteq 1\,500\,000\,\mathrm{t}.$$ **2 body**

c) Označíme-li počet lidí n, pak pro celkovou tíhu ledovce s lidmi dostáváme

$$F_\mathrm{G} = (m + n m_1)\,g = (1\,458\,883\,560\,\mathrm{kg} + 2\,200 \cdot 70\,\mathrm{kg}) \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \doteq 14\,000\,000\,000\,\mathrm{N}.$$

Vztlaková síla působící na plně ponořený ledovec pak vychází

$$F_\mathrm{vz} = \varrho_\mathrm{v} V g = 1\,020\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 1\,585\,743\,\mathrm{m^3} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \doteq 16\,000\,000\,000\,\mathrm{N} > F_\mathrm{G}.$$

Ledovec se sice nepotopí, ale vzhledem k nepravidelnému tvaru by nebylo možné tolik lidí na něj umístit, aby se na něm udrželi. Lidem by navíc hrozilo prochladnutí, naopak ledovec by jejich přítomností odtával a hrozilo by i jeho rozlomení na části. **3 body**

Poznámka: Stačí pouze jeden důvod, doporučujeme uznat i případná další rozumná zdůvodnění. Při výpočtu není nutné počítat síly, ale lze porovnat hmotnost ledovce s lidmi a hmotnost mořské vody vytlačené ponořeným ledovcem (vycházejí o řád nižší než výše uvedené síly).

d) V hloubce $h = 12\,500\,\mathrm{stop} = 3\,810\,\mathrm{m}$ je hydrostatický tlak

$$p = \varrho_\mathrm{v} g h = 1\,020\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 3\,810\,\mathrm{m} = 38\,084\,760\,\mathrm{Pa} \doteq 38\,\mathrm{MPa}.$$ **2 body**

Poznámka: Skutečná výška ledovce se odhaduje pouze na $l = 400\,\mathrm{stop} \doteq 120\,\mathrm{m}$, protože nemá tvar kvádru (spíše jehlanu, i když ani to není přesné), ale plocha průřezu vynořené části je menší než u ponořené, což připomíná i známé sousloví „špička ledovce“.

FO63E3-4: Elektrický obvod

a) Proud ve větvi A–C–B vychází

$$I_1 = \frac{U_\mathrm{z}}{R_1 + R_2} = \frac{4{,}0\,\mathrm{V}}{100\,\Omega + 100\,\Omega} = 0{,}020\,\mathrm{A} = 20\,\mathrm{mA},$$

proud ve větvi A–D–B pak

$$I_2 = \frac{U_\mathrm{z}}{R_3 + R_4} = \frac{4{,}0\,\mathrm{V}}{200\,\Omega + 200\,\Omega} = 0{,}010\,\mathrm{A} = 10\,\mathrm{mA}.$$

2 body

b) Napětí U_1 a U_4 určíme jako napětí na rezistorech s odporem R_1 a R_4, tj.

$$U_1 = R_1 I_1 = 100\,\Omega \cdot 0{,}020\,\mathrm{A} = 2{,}0\,\mathrm{V},$$
$$U_4 = R_4 I_2 = 200\,\Omega \cdot 0{,}010\,\mathrm{A} = 2{,}0\,\mathrm{V}.$$

2 body

Poznámka: Velikost napětí lze zdůvodnit i úvahou – protože je velikost dvou odporů v každé z větví stejná, připadne na každý z rezistorů stejné napětí $U_\mathrm{z}/2 = 2{,}0\,\mathrm{V}$.

c) Zdrojem prochází proud

$$I = I_1 + I_2 = 20\,\mathrm{mA} + 10\,\mathrm{mA} = 30\,\mathrm{mA}.$$

2 body

d) Za dobu $\tau = 5{,}0\,\mathrm{min} = 300\,\mathrm{s}$ zdroj vykoná elektrickou práci

$$W = U_\mathrm{z} I \tau = 4{,}0\,\mathrm{V} \cdot 0{,}030\,\mathrm{A} \cdot 300\,\mathrm{s} = 36\,\mathrm{J}.$$

1 bod

Elektrická práce se přemění na vnitřní (tepelnou) energii rezistorů (projeví se jejich zahřátím). **1 bod**

e) Pro dané hodnoty odporů rezistorů jsou napětí U_1 mezi uzly A a C, U_2 mezi uzly C a B, U_3 mezi uzly A a D a U_4 mezi uzly D a B stejná (rovna 2,0 V), proto mezi uzly C–D, tj. na rezistoru s odporem R_5, je nulové napětí, které je dáno rozdílem napětí $U_1 - U_3 = 0{,}0\,\mathrm{V}$. Rezistorem s odporem R_5 proud neprochází, $I_3 = 0{,}0\,\mathrm{A}$. **2 body**