Řešení úloh školního kola 63. ročníku Fyzikální olympiády ve školním roce 2021/2022

Kategorie E a F

Autoři úloh: D. Kluvanec (11, FO SR), V. Koudelková (8), L. Richterek (4, 5), J. Thomas (2–3, 6), I. Volf (9, 12), Санкт-Петербургская городская олимпиада по физике 2013 (7) Всесибирская открытая олимпиада школьников по физике 2018 (1) a 2019 (10)

FO63EF1-1: Závody automobilů

Vůz č. 1 dorazil do cíle za čas

$$t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{240\,\mathrm{km}}{100\,\mathrm{km/h}} = 2{,}4\,\mathrm{h} = 2\,\mathrm{h}\ 24\,\mathrm{min}.$$ **2 body**

Vůz č. 2 ujel za čas $t_{21} = 1\,\mathrm{h}$ polovinu trati, tj. $s/2 = 120\,\mathrm{km}$ a stejná vzdálenost mu zbývala do cíle. Tu ujel rychlostí $v_2 = 90\,\mathrm{km/h}$ za čas

$$t_{22} = \frac{s/2}{v_2} = \frac{120\,\mathrm{km}}{90\,\mathrm{km/h}} = 1\frac{1}{3}\,\mathrm{h} = 1\,\mathrm{h}\ 20\,\mathrm{min}.$$ **4 body**

Celkem trasu závodu urazil za čas $t_2 = 2\,\mathrm{h}\ 20\,\mathrm{min}$. **1 bod**

Protože $t_1 - t_2 = 4\,\mathrm{min}$, byl druhý vůz v cíli o 4 min dříve. **3 body**

FO63EF1-2: Běžec a cyklistka

a) Rychlosti běžce Adama na jednotlivých úsecích jsou

$$v_1 = 3{,}5\,\mathrm{m/s},\quad v_2 = 4{,}0\,\mathrm{m/s},\quad v_3 = 4{,}5\,\mathrm{m/s},\quad v_4 = 5{,}0\,\mathrm{m/s}.$$

Délka jednotlivých úseků, které Adam urazí vždy za $t = 3{,}0\,\mathrm{min} = 180\,\mathrm{s}$, vychází

$$s_1 = v_1 t = 3{,}5\,\mathrm{m/s}\cdot 180\,\mathrm{s} = 630\,\mathrm{m},\quad s_2 = v_2 t = 4{,}0\,\mathrm{m/s}\cdot 180\,\mathrm{s} = 720\,\mathrm{m},$$
$$s_3 = v_3 t = 4{,}5\,\mathrm{m/s}\cdot 180\,\mathrm{s} = 810\,\mathrm{m},\quad s_4 = v_4 t = 5{,}0\,\mathrm{m/s}\cdot 180\,\mathrm{s} = 900\,\mathrm{m}.$$

Adam tak celkem uběhne

$$s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 630\,\mathrm{m} + 720\,\mathrm{m} + 810\,\mathrm{m} + 900\,\mathrm{m} = 3\,060\,\mathrm{m} \doteq 3\,100\,\mathrm{m}.$$

3 body

b) Na druhém úseku, kdy $v_\mathrm{e} > v_2$, získá Eva náskok

$$\Delta s = (v_\mathrm{e} - v_2)\,t = (4{,}2\,\mathrm{m/s} - 4{,}0\,\mathrm{m/s})\cdot 180\,\mathrm{s} = 36\,\mathrm{m}.$$

Na třetím úseku už je Adam rychlejší než Eva ($v_3 > v_\mathrm{e}$) a začne jí dohánět. Vzájemná rychlost Adama a Evy je $v_3 - v_\mathrm{e}$ a vzdálenost Δs urazí za dobu

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v_3 - v_\mathrm{e}} = \frac{v_\mathrm{e} - v_2}{v_3 - v_\mathrm{e}} t = \frac{4{,}2\,\mathrm{m/s} - 4{,}0\,\mathrm{m/s}}{4{,}5\,\mathrm{m/s} - 4{,}2\,\mathrm{m/s}}\cdot 180\,\mathrm{s} = 120\,\mathrm{s} < 180\,\mathrm{s}.$$

Bude se tedy nacházet ještě na třetím tréninkovém úseku ve vzdálenosti

$$s' = s_1 + s_2 + v_3\Delta t = 630\,\mathrm{m} + 720\,\mathrm{m} + 4{,}5\,\mathrm{m/s}\cdot 120\,\mathrm{s} = 1\,890\,\mathrm{m} \doteq 1\,900\,\mathrm{m}$$

od místa startu. **3 body**

c) Adamovi zbývá ještě čas

$$\Delta t' = (180\,\mathrm{s} - 120\,\mathrm{s}) + 180\,\mathrm{s} = 240\,\mathrm{s} = 4\,\mathrm{min}$$

běhu. Za tuto dobu ujede Eva vzdálenost

$$s_{\mathrm{c}1} = v_\mathrm{e}\Delta t' = 4{,}2\,\mathrm{m/s}\cdot 240\,\mathrm{s} = 1\,008\,\mathrm{m}.$$

Když Adam doběhne, Eva se nachází ve vzdálenosti $s'' = s' + s_{c1} = 1\,890\,\mathrm{m} + 1\,008\,\mathrm{m} = 2\,898\,\mathrm{m}$ od místa startu, tedy ve vzdálenosti

$$s - s'' = 3\,060\,\mathrm{m} - 2\,898\,\mathrm{m} = 162\,\mathrm{m} \doteq 160\,\mathrm{m}$$

za ním. **2 body**

d) Za prvních $t = 180\,\mathrm{s}$ pohybu Adama ujela Eva vzdálenost

$$s_{c2} = v_e t = 4{,}2\,\mathrm{m/s} \cdot 180\,\mathrm{s} = 756\,\mathrm{m}$$

První běžecký úsek měřil $s_1 = 630\,\mathrm{m}$, při startu Adama byla Eva ve vzdálenosti

$$s_{c2} - s_1 = 756\,\mathrm{m} - 630\,\mathrm{m} = 126\,\mathrm{m} \doteq 130\,\mathrm{m}$$

před místem startu Adama. **2 body**

FO63EF1-3: Pájka

a) Objem olova ve vzorku cínové pájky o hmotnosti $m = 1\,\mathrm{kg} = 1\,000\,\mathrm{g}$ je

$$V_{\mathrm{Pb1}} = \frac{0{,}4m}{\varrho_{\mathrm{Pb}}} = \frac{0{,}4 \cdot 1\,000\,\mathrm{g}}{11{,}3\,\mathrm{g/cm^3}} \doteq 35{,}398\,\mathrm{cm^3} \doteq 35\,\mathrm{cm^3},$$

objem cínu v témže vzorku

$$V_{\mathrm{Sn1}} = \frac{0{,}6m}{\varrho_{\mathrm{Sn}}} = \frac{0{,}6 \cdot 1\,000\,\mathrm{g}}{7{,}3\,\mathrm{g/cm^3}} \doteq 82{,}192\,\mathrm{cm^3} \doteq 82\,\mathrm{cm^3}.$$

Podobně objem olova ve vzorku olověné pájky o hmotnosti $m = 1\,\mathrm{kg} = 1\,000\,\mathrm{g}$ je

$$V_{\mathrm{Pb2}} = \frac{0{,}6m}{\varrho_{\mathrm{Pb}}} = \frac{0{,}6 \cdot 1\,000\,\mathrm{g}}{11{,}3\,\mathrm{g/cm^3}} \doteq 53{,}097\,\mathrm{cm^3} \doteq 53\,\mathrm{cm^3},$$

objem cínu v témže vzorku

$$V_{\mathrm{Sn2}} = \frac{0{,}4m}{\varrho_{\mathrm{Sn}}} = \frac{0{,}4 \cdot 1\,000\,\mathrm{g}}{7{,}3\,\mathrm{g/cm^3}} \doteq 54{,}795\,\mathrm{cm^3} \doteq 55\,\mathrm{cm^3}.$$

4 body

b) Hustota cínové pájky je

$$\varrho_1 = \frac{m}{V_{\mathrm{Pb1}} + V_{\mathrm{Sn1}}} = \frac{1\,000\,\mathrm{g}}{35{,}398\,\mathrm{cm^3} + 82{,}192\,\mathrm{cm^3}} \doteq 8{,}504\,1\,\mathrm{g/cm^3} \doteq 8{,}5\,\mathrm{g/cm^3},$$

olověné

$$\varrho_2 = \frac{m}{V_{\mathrm{Pb2}} + V_{\mathrm{Sn2}}} = \frac{1\,000\,\mathrm{g}}{53{,}097\,\mathrm{cm^3} + 54{,}795\,\mathrm{cm^3}} \doteq 9{,}268\,5\,\mathrm{g/cm^3} \doteq 9{,}3\,\mathrm{g/cm^3}.$$

3 body

Poznámka: Výsledné hustoty lze vyjádřit přímo pomocí zadaných hodnot, pro cínovou pájku dostaneme

$$\varrho_1 = \frac{m}{V_{\mathrm{Pb1}} + V_{\mathrm{Sn1}}} = \frac{m}{\dfrac{0{,}4m}{\varrho_{\mathrm{Pb}}} + \dfrac{0{,}6m}{\varrho_{\mathrm{Sn}}}} = \frac{\varrho_{\mathrm{Pb}}\varrho_{\mathrm{Sn}}}{0{,}4\varrho_{\mathrm{Sn}} + 0{,}6\varrho_{\mathrm{Pb}}} = \frac{5\varrho_{\mathrm{Pb}}\varrho_{\mathrm{Sn}}}{2\varrho_{\mathrm{Sn}} + 3\varrho_{\mathrm{Pb}}} =$$

$$= \frac{5 \cdot 11{,}3\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 7{,}3\,\mathrm{g/cm^3}}{2 \cdot 7{,}3\,\mathrm{g/cm^3} + 3 \cdot 11{,}3\,\mathrm{g/cm^3}} \doteq 8{,}5\,\mathrm{g/cm^3},$$

pro olověnou

$$\varrho_2 = \frac{m}{V_{\mathrm{Pb2}} + V_{\mathrm{Sn2}}} = \frac{m}{\dfrac{0{,}6m}{\varrho_{\mathrm{Pb}}} + \dfrac{0{,}4m}{\varrho_{\mathrm{Sn}}}} = \frac{\varrho_{\mathrm{Pb}}\varrho_{\mathrm{Sn}}}{0{,}6\varrho_{\mathrm{Sn}} + 0{,}4\varrho_{\mathrm{Pb}}} = \frac{5\varrho_{\mathrm{Pb}}\varrho_{\mathrm{Sn}}}{3\varrho_{\mathrm{Sn}} + 2\varrho_{\mathrm{Pb}}} =$$

$$= \frac{5 \cdot 11{,}3\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 7{,}3\,\mathrm{g/cm^3}}{3 \cdot 7{,}3\,\mathrm{g/cm^3} + 2 \cdot 11{,}3\,\mathrm{g/cm^3}} \doteq 9{,}3\,\mathrm{g/cm^3}.$$

c) Hmotnost olova v cínové pájce je $m_{\mathrm{Pb1}} = \varrho_{\mathrm{Pb}} \cdot 0{,}4V$ a hmotnost cínu v cínové pájce je v tomto případě $m_{\mathrm{Sn1}} = \varrho_{\mathrm{Sn}} \cdot 0{,}6V$. Hustota cínové pájky vychází

$$\varrho_{\mathrm{V1}} = \frac{m_{\mathrm{Pb1}} + m_{\mathrm{Sn1}}}{V} = 0{,}4\varrho_{\mathrm{Pb}} + 0{,}6\varrho_{\mathrm{Sn}} = 0{,}4 \cdot 11{,}3\,\mathrm{g/cm^3} + 0{,}6 \cdot 7{,}3\,\mathrm{g/cm^3} = 8{,}9\,\mathrm{g/cm^3},$$

olověné pak podobně

$$\varrho_{\mathrm{V2}} = 0{,}6\varrho_{\mathrm{Pb}} + 0{,}4\varrho_{\mathrm{Sn}} = 0{,}6 \cdot 11{,}3\,\mathrm{g/cm^3} + 0{,}4 \cdot 7{,}3\,\mathrm{g/cm^3} = 9{,}7\,\mathrm{g/cm^3}.$$ **3 body**

Poznámka: Protože menší atomy cínu vyplňují částečně mezery mezi většími atomy olova, bude ve skutečnosti objem slitiny menší, než součet objemů jednotlivých prvků.

FO63EF1-4: Na jižní pól

a) Považujeme-li Zemi přibližně za kouli se středním poloměrem $r_{\mathrm{Z}} = 6\,371\,\mathrm{km}$, připadá na 360° celý obvod $2\pi r_{\mathrm{Z}}$, na jeden stupeň pak vzdálenost

$$d_1 = \frac{2\pi r_{\mathrm{Z}}}{360} = \frac{2\pi \cdot 6\,371\,\mathrm{km}}{360} \doteq 111{,}19\,\mathrm{km} \doteq 111\,\mathrm{km}.$$ **1 bod**

Poznámka: Známá a často užívaná hodnota poloměru Země 6 378 km odpovídá rovníkovému poloměru a není vhodná pro výpočty vzdáleností v okolí pólů. Střední hodnota r_{Z} použitá v úloze je převzata z `http://astronomia.zcu.cz/planety/zeme/1935-charakteristika-zeme`.

b) Zeměpisná šířka jižního pólu odpovídá 90° j. š. Amundsenova výprava překonala rozdíl zeměpisných šířek $\varphi_{\mathrm{a}} = 90° - 78°30' = 11{,}5°$, Scottova $\varphi_{\mathrm{s}} = 90° - 77°38' = 12{,}367°$. Tomu odpovídají vzdálenosti

$$d_{\mathrm{a}} = \varphi_{\mathrm{a}} d_1 = 11{,}5° \cdot 111{,}19\,\mathrm{km} \doteq 1\,278{,}7\,\mathrm{km} \doteq 1\,280\,\mathrm{km},$$

$$d_{\mathrm{s}} = \varphi_{\mathrm{s}} d_1 = 12{,}367° \cdot 111{,}19\,\mathrm{km} \doteq 1\,375{,}1\,\mathrm{km} \doteq 1\,380\,\mathrm{km}.$$

Trasa Scottovy expedice byla delší o $d_{\mathrm{s}} - d_{\mathrm{a}} = 1\,375{,}1\,\mathrm{km} - 1\,278{,}7\,\mathrm{km} = 96{,}4\,\mathrm{km} \doteq 96\,\mathrm{km}$, tedy téměř o 100 km. Tento výsledek lze odhadnout i z toho, že základna, z níž vyrážela Amundsenova expedice, byla téměř o 1° zeměpisné šířky blíže pólu. **2 body**

Poznámka: Získané výsledky jsou i v rámci zjednodušeného modelu v poměrně dobré shodě s údaji na internetu $d_{\mathrm{a}} = 1\,278\,\mathrm{km}$ a $d_{\mathrm{s}} = 1\,374\,\mathrm{km}$ (viz např. `https://en.wikipedia.org/wiki/Comparison_of_the_Amundsen_and_Scott_expeditions`). Zatímco Amundsen se pohyboval zcela neznámým terénem, Scott víceméně sledoval trasu Stackletonovy výpravy, která roku 1908 dosáhla 88°23′ j. š. a od jižního pólu ji dělilo asi 180 km.

c) Podle části a) připadá na jeden stupeň vzdálenost $d_1 \doteq 111{,}19\,\mathrm{km}$, na dva stupně $2d_1 \doteq 2 \cdot 111{,}19\,\mathrm{km} = 222{,}38\,\mathrm{km} \doteq 222\,\mathrm{km}$. Podobně získáme další hodnoty (zaokrouhleno na 3 platné číslice):

Poloha	80° j.š.	82° j.š.	84° j.š.	86° j.š.	88° j.š.	jižní pól
Vzdálenost od pólu	1 110 km	890 km	667 km	445 km	222 km	0 km

2 body

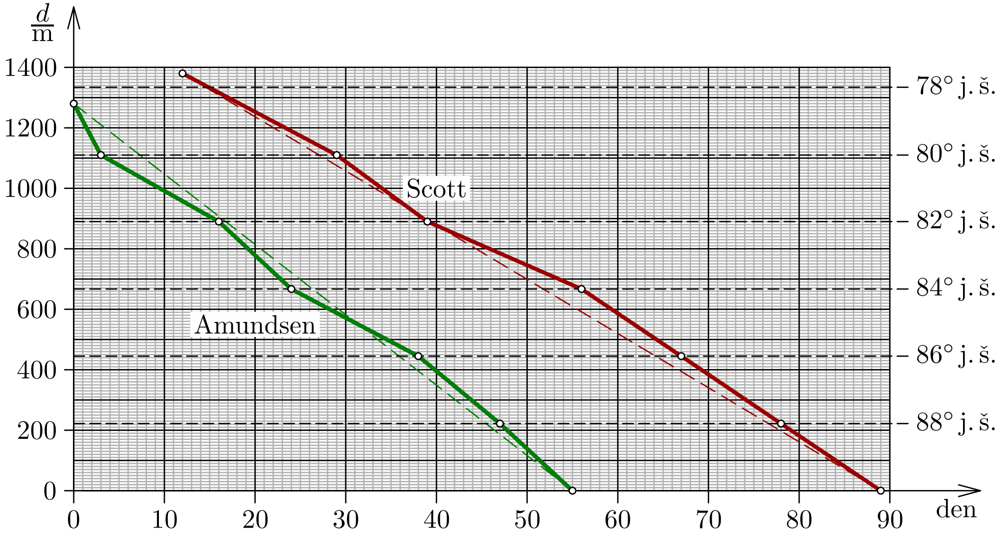
d) Do tabulky ze zadání doplňme pořadové číslo dne, kdy expedice dosáhly dané zeměpisné šířky od 20. 10. 1911, kdy startovala Amundsenova výprava:

Poloha	Vzdálenost od pólu	Den Amundsen	Den Scott
start Amundsen 78°30′ j.š.	1 280 km	0	
start Scott 77°38′ j.š.	1 380 km		12
80° j.š.	1 110 km	3	29
82° j.š.	890 km	16	39
84° j.š.	667 km	24	56
86° j.š.	445 km	38	67
88° j.š.	222 km	47	78
jižní pól	0 km	55	89

Příklad grafu je na obr. 1, je možné na místo km vynášet zeměpisnou šířku.

4 body

Poznámka: Lze uznat i graf s obrácenou svislou osou, tj. ve směru rostoucí zeměpisné šířky.



Obr. 1: K řešení úlohy FO63EF1-4

e) Ze sklonu grafu je zřejmé, že průměrná rychlost Amundsenovy výpravy byla větší, především v první a závěrečné části cesty. **1 bod**

Poznámka: Závěr lze ověřit i výpočtem, který není po řešitelích požadován. Amundsenova výprava byla na cestě k pólu $t_\mathrm{a} = 55\,\mathrm{dní}$, Scotova $t_\mathrm{s} = 89\,\mathrm{d} - 12\,\mathrm{d} = 77\,\mathrm{dní}$. Průměrné rychlosti vycházejí

$$v_\mathrm{a} = \frac{d_\mathrm{a}}{t_\mathrm{a}} = \frac{1\,278{,}7\,\mathrm{km}}{55\,\mathrm{dní}} \doteq 23{,}249\,\mathrm{km/den} \doteq 23\,\mathrm{km/den},$$
$$v_\mathrm{s} = \frac{d_\mathrm{s}}{t_\mathrm{s}} = \frac{1\,375{,}1\,\mathrm{km}}{77\,\mathrm{dní}} \doteq 17{,}858\,\mathrm{km/den} \doteq 18\,\mathrm{km/den}.$$

FO63EF1-5: MVE Vydra

a) Mechanická polohová energie vody $mgh = \varrho Vgh$ se přemění na využitelnou elektrickou energii (účinnost není zadána, počítáme proto, že se přemění všechna), vychází

$$E = \varrho Vgh = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 67\,000\,\mathrm{m^3} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 240\,\mathrm{m} =$$
$$= 157\,584\,000\,000\,\mathrm{J} \doteq 160\,\mathrm{GJ}.$$ **2 body**

Poznámka: Využitelný objem nádrže je pouze $63\,760\,\mathrm{m^3}$, takže jde o horní odhad.

b) Mechanická polohová energie vody mgh se přeměňuje na elektrickou energii, za čas $t = 1\,\mathrm{s}$ se přemění energie vody o hmotnosti dané součinem hustoty a objemového průtoku $m = \varrho V_1/t = \varrho Q$. Pro výkon $P_0 = 2P_1 = 2 \cdot 3{,}2\,\mathrm{MW} = 6{,}4\,\mathrm{MW} = 6\,400\,000\,\mathrm{W}$ dodávaný vodou platí

$$P_0 = \frac{mhg}{t} = \frac{\varrho Vhg}{t} = \varrho Qgh,$$

odkud vyjádříme

$$Q = \frac{P_0}{\varrho gh} = \frac{6\,400\,000\,\mathrm{W}}{1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 240\,\mathrm{m}} \doteq 2{,}721\,1\,\mathrm{m^3/s} \doteq 2{,}7\,\mathrm{m^3/s}.$$

Na každou turbínu připadá $Q/2 \doteq 1{,}360\,5\,\mathrm{m^3/s} \doteq 1{,}4\,\mathrm{m^3/s}$. **3 body**

c) Při průtoku Q se nádrž vyprázdní za dobu

$$t = \frac{V}{Q} = \frac{67\,000\,\mathrm{m^3}}{2{,}721\,1\,\mathrm{m^3/s}} \doteq 24\,622\,\mathrm{s} \doteq 6{,}839\,6\,\mathrm{h} \doteq 6\,\mathrm{h}\,50\,\mathrm{min}.$$ **2 body**

d) Při výkonu $P_0 = 6{,}4\,\mathrm{MW} = 6\,400\,000\,\mathrm{W}$ dodá elektrárna energii

$$E_1 = 29{,}2\,\mathrm{GWh} = 29\,200\,000\,000\,\mathrm{W} \cdot 3\,600\,\mathrm{s} = 105\,120\,000\,000\,000\,\mathrm{W \cdot s} =$$
$$= 105\,120\,000\,000\,000\,\mathrm{J}$$

za čas

$$t_1 = \frac{E_1}{P_0} = \frac{105\,120\,000\,000\,000\,\mathrm{J}}{6\,400\,000\,\mathrm{W}} = 16\,425\,000\,\mathrm{s} \doteq 4\,563\,\mathrm{h} \doteq 190\,\mathrm{dní}.$$ **3 body**

Poznámka: Výsledek odpovídá asi 52 % dnů v roce, elektrárna nepracuje průběžně, ale dodává energii ve špičkách spotřeby. Využitelný výkon generátorů napojených na turbíny je navíc nižší, pouze 5,4 MW, takže doba provozu odpovídá asi 225 dnům.

FO63EF1-6: Indiana Jones na útěku

a) U kladkostroje je nejmenší možná síla pro zvedání břemene n-krát menší než tíha nákladu, kde $n = 6$ je počet kladek kladkostroje. Při hmotnosti sochy $m_1 = 48\,\mathrm{kg}$

a hmotnosti $m_2 = 74\,\mathrm{kg}$ na ní sedícího Buddyho vychází

$$F = \frac{(m_1 + m_2)\,g}{n} = \frac{(48\,\mathrm{kg} + 74\,\mathrm{kg}) \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg}}{6} \doteq 199{,}27\,\mathrm{N} \doteq 200\,\mathrm{N}. \quad \textbf{3 body}$$

b) Při rovnoměrném zvedání do výšky $h = 10\,\mathrm{m}$ má být rychlost zvedání břemene

$$v_0 = \frac{h}{t} = \frac{10\,\mathrm{m}}{50\,\mathrm{s}} = \frac{1}{5}\,\mathrm{m/s} = 0{,}2\,\mathrm{m/s}.$$

Protože Indiana Jones působí 6krát menší silou, ale práce musí být stejná, jako při zvedání silou odpovídající tíze nákladu do výšky h, musí být délka lana protažená jeho rukama i rychlost tahání lana 6krát větší; Indiana Jones proto musí tahat rychlostí $v = 6v_0 = 6 \cdot 0{,}2\,\mathrm{m/s} = 1{,}2\,\mathrm{m/s}$. **3 body**

c) Pronásledovatelé se pohybují rychlostí $v_2 = 7{,}5\,\mathrm{km/h} \doteq 2{,}083\,3\,\mathrm{m/s} \doteq 2{,}1\,\mathrm{m/s}$. Na překonání vzdálenosti $s = 950\,\mathrm{m}$ potřebují čas

$$t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{950\,\mathrm{m}}{2{,}083\,3\,\mathrm{m/s}} = 456\,\mathrm{s} \doteq 460\,\mathrm{s}.$$

Indiana Jones má náskok $\Delta t = 50\,\mathrm{s}$, musí tedy vzdálenost $s = 950\,\mathrm{m}$ urazit za dobu $t_1 = t_2 + \Delta t = 456\,\mathrm{s} + 50\,\mathrm{s} = 506\,\mathrm{s}$ a musí se pohybovat rychlostí

$$v_1 = \frac{s}{t_1} = \frac{950\,\mathrm{m}}{506\,\mathrm{s}} \doteq 1{,}877\,5\,\mathrm{m/s} \doteq 1{,}9\,\mathrm{m/s}.$$

Výsledek můžeme vyjádřit i v km/h jako $v_1 \doteq 6{,}758\,9\,\mathrm{km/h} \doteq 6{,}8\,\mathrm{km/h}$.

4 body

FO63EF1-7: Artista cvičí rovnováhu

a) Jak artista, tak míč mají být v rovnováze, výslednice sil, které na ně působí musí být nulová. Deska s artistou působí na míč tlakovou silou, označíme-li tlak horní části míče p_1, platí pro tlakovou sílu $F_{\mathrm{p1}} = p_1 S_1$. Tato síla působí proti tíhové síle artisty s deskou, tj. $p_1 S_1 = Mg$, odkud

$$p_1 = \frac{Mg}{S_1} = \frac{50\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg}}{0{,}05\,\mathrm{m}^2} = 9\,800\,\mathrm{Pa}. \quad \textbf{3 body}$$

Podobně při tlaku v dolní části míče p_2 musí tlaková síla podlahy $F_{\mathrm{p2}} = p_2 S_2$ působit proti tíhové síle míče s artistou a deskou, $p_2 S_2 = (m + M)\,g$. Pro tlak p_2 tak dostáváme

$$p_2 = \frac{(m + M)\,g}{S_2} = \frac{(300\,\mathrm{kg} + 50\,\mathrm{kg}) \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg}}{0{,}2\,\mathrm{m}^2} = 17\,150\,\mathrm{Pa} \doteq 17\,\mathrm{kPa}. \quad \textbf{3 body}$$

b) Tlaky nejsou stejné, protože na podložku působí tlaková síla zvětšená o tíhu vody v míči, tlak v dolní části je proto větší o hydrostatický tlak vody. **1 bod**

c) Označme hledanou výšku h. Rozdíl mezi tlaky odpovídá hydrostatickému tlaku $p_2 - p_1 = h\varrho g$, takže vychází

$$h = \frac{p_2 - p_1}{\varrho g} = \frac{17\,150\,\mathrm{Pa} - 9\,800\,\mathrm{Pa}}{1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg}} = 0{,}75\,\mathrm{m} = 75\,\mathrm{cm}. \quad \textbf{3 body}$$

Poznámka: Hledanou výšku lze elegantněji vyjádřit i pomocí zadaných veličin

$$h = \frac{p_2 - p_1}{\varrho g} = \frac{1}{\varrho g}\left[\frac{(m+M)\,g}{S_2} - \frac{Mg}{S_1}\right] = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{m+M}{S_2} - \frac{M}{S_1}\right) =$$
$$= \frac{1}{1\,000\,\mathrm{kg/m^3}} \cdot \left(\frac{300\,\mathrm{kg} + 50\,\mathrm{kg}}{0{,}2\,\mathrm{m^2}} - \frac{50\,\mathrm{kg}}{0{,}05\,\mathrm{m^2}}\right) = 0{,}75\,\mathrm{m}.$$

FO63E1-8: Výkon rezistoru

a) Jedná se o výkon, který je schopen rezistor vyzářit (rezistory s větším výkonem jsou větší a mají větší povrch). Pokud do něj teče větší příkon, než na jaký je určen, rezistor se zahřívá a může se spálit. **1 bod**

b) Pokud bude na rezistoru napětí $U = 9\,\mathrm{V}$, poteče jím proud
$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{9\,\mathrm{V}}{270\,\Omega} \doteq 0{,}033\,333\,\mathrm{A} \doteq 0{,}03\,\mathrm{A}.$$
Ztrátový výkon rezistoru pak vychází
$$P = U \cdot I_1 = \frac{U^2}{R} = \frac{(9\,\mathrm{V})^2}{270\,\Omega} = 0{,}3\,\mathrm{W} < P_1 = 0{,}6\,\mathrm{W}.$$
Kryšpínovi rezistor o výkonu 0,6 W stačí. **3 body**

c) Jestliže je ztrátový výkon $P_1 = 0{,}6\,\mathrm{W}$, potom maximální napětí U_m, na které může Kryšpín rezistor připojit získáme ze vztahu $P_1 = U_\mathrm{m}^2/R_1$; dostáváme
$$U_\mathrm{m} = \sqrt{PR_1} = \sqrt{0{,}6\,\mathrm{W} \cdot 270\,\Omega} \doteq 12{,}728\,\mathrm{V} \doteq 12\,\mathrm{V}.$$ **3 body**

Poznámka: Zde má smysl zaokrouhlovat spíše dolů.

d) Ztrátový výkon je v tomto případě
$$P' = R_2 I^2 = 18\,\Omega \cdot (0{,}3\,\mathrm{A})^2 = 1{,}62\,\mathrm{W} \doteq 2\,\mathrm{W}.$$
Kryšpín musí tatínkovi koupit rezistor o výkonu 2 W. **3 body**

FO63E1-9: Zamrzlý rybník

a) Objem ledu ve kře o ploše $S = 80\,\mathrm{ha} = 800\,000\,\mathrm{m^2}$ a tloušťce $d = 20\,\mathrm{cm} = 0{,}20\,\mathrm{m}$ vychází
$$V = Sd = 800\,000\,\mathrm{m^2} \cdot 0{,}20\,\mathrm{m} = 160\,000\,\mathrm{m^3},$$
hmotnost
$$m = \varrho_\mathrm{l} V = 920\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 160\,000\,\mathrm{m^3} = 147\,200\,000\,\mathrm{kg} \doteq 150\,000\,\mathrm{t}.$$ **3 body**

b) Teplo potřebné k roztátí ledu bude
$$Q = m l_\mathrm{t} = 147\,200\,000\,\mathrm{kg} \cdot 330\,000\,\mathrm{J/kg} = 48\,576\,000\,000\,000\,\mathrm{J} \doteq 49\,000\,\mathrm{GJ}.$$
2 body

Výsledek platí v případě, že teplota tajícího ledu je 0 °C, jak je uvedeno v zadání. Pokud by byla nižší, bylo by nutné započítat i teplo k ohřátí ledu na teplotu tání.

c) Pro část ledové kry o ploše $S_1 = 0{,}5\,\mathrm{m} \times 0{,}5\,\mathrm{m} = 0{,}25\,\mathrm{m^2}$ vychází objem
$$V_1 = S_1 d = 0{,}25\,\mathrm{m^2} \cdot 0{,}20\,\mathrm{m} = 0{,}050\,\mathrm{m^3},$$
hmotnost
$$m_1 = \varrho_\mathrm{l} V = 920\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}050\,\mathrm{m^3} = 46\,\mathrm{kg}.$$

Pro teplou vodu o objemu V_2, hustotě $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$ a teplotě $t_2 = 40\,°\mathrm{C}$, která má dodat teplo na roztátí ledu sestavíme kalorimetrickou rovnici

$$m_1 l_\mathrm{t} = \varrho V_2 c\,(t_2 - t_1)\,,$$

z níž vyjádříme

$$V_2 = \frac{m_1 l_\mathrm{t}}{\varrho c\,(t_2 - t_1)} = \frac{46\,\mathrm{kg} \cdot 330\,000\,\mathrm{J/kg}}{1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot °C)}\,(40\,°\mathrm{C} - 0\,°\mathrm{C})} =$$
$$= 0{,}090\,357\,\mathrm{m^3} \doteq 90\,\mathrm{litrů}.$$

Výsledek odpovídá přibližně objemu 9 desetilitrových kbelíků. **5 bodů**

Poznámka: Lze postupovat i bez obecného řešení, vypočítat teplo potřebné na roztátí ledu a potom určit odpovídající množství teplé vody.

FO63EF1-10: Stahování z internetu

Z formulace, že rychlost přenosu dat „spadla“ a „vyskočila“ lze usoudit, že změny byly rychlé a můžeme je považovat za okamžité. Označme celkové množství stahovaných dat $X = 2\,700\,\mathrm{MB}$, původně odhadovanou dobu stahování $T_1 = 18\,\mathrm{min}$, skutečnou dobu stahování $T_2 = 20\,\mathrm{min}$ a hledanou dobu, po kterou byla rychlost stahování menší, T_0 (z toho plyne, že po dobu $T_2 - T_0$ byla rychlost na počáteční hodnotě). Původní rychlost stahování má hodnotu

$$v = \frac{X}{T_1} = \frac{2\,700\,\mathrm{MB}}{18\,\mathrm{min}} = 150\,\mathrm{MB/min} = \frac{2\,700\,\mathrm{MB}}{18 \cdot 60\,\mathrm{s}} = 2{,}5\,\mathrm{MB/s}.$$

Pro stahování objemu dat X pak platí rovnice

$$X = (T_2 - T_0)\,\frac{X}{T_1} + T_0 \frac{1}{3}\frac{X}{T_1}.$$ **5 bodů**

Rovnici postupně upravíme:

$$1 = \frac{T_2 - T_0}{T_1} + \frac{T_0}{3T_1}, \qquad \Longrightarrow \qquad 3T_1 = 3\,(T_2 - T_0) + T_0,$$
$$T_0 = \frac{3}{2}\,(T_2 - T_1) = \frac{3}{2} \cdot (20\,\mathrm{min} - 18\,\mathrm{min}) = 3\,\mathrm{min}.$$ **5 bodů**

Poznámka: Rovnici lze řešit i numericky, po dosazení hodnot (v MB a minutách, popř. MB/min) získáme

$$2\,700 = (20 - T_0) \cdot 150 + T_0 \cdot 50,$$

odkud opět vychází $T_0 = 3\,\mathrm{min}$.

FO63F1-11 (experimentální úloha): Jak veliká je kapka

Hmotnost m_0 jedné kapky vody je závislá na teplotě a tvaru kapátka. Objem kapky vody při pokojové teplotě 15 °C–24 °C je přibližně mezi 0,05 ml až 0,07 ml, tj. $0{,}05\,\mathrm{cm^3}$ až $0{,}07\,\mathrm{cm^3}$. Hmotnost m_0 kapky potom vychází

$$m_0 = V_0 \varrho_\mathrm{v} \approx 0{,}05\,\mathrm{cm^3} \cdot 1\,\mathrm{g/cm^3} \text{ až } 0{,}07\,\mathrm{g} \cdot 1\,\mathrm{g/cm^3} \approx$$
$$\approx 0{,}05\,\mathrm{g} \text{ až } 0{,}07\,\mathrm{g} = 50\,\mathrm{mg} \text{ až } 70\,\mathrm{mg}.$$

Objem 1 ml, který odpovídá hmotnosti 1 g vody, tak představuje řádově 14–20 kapek.

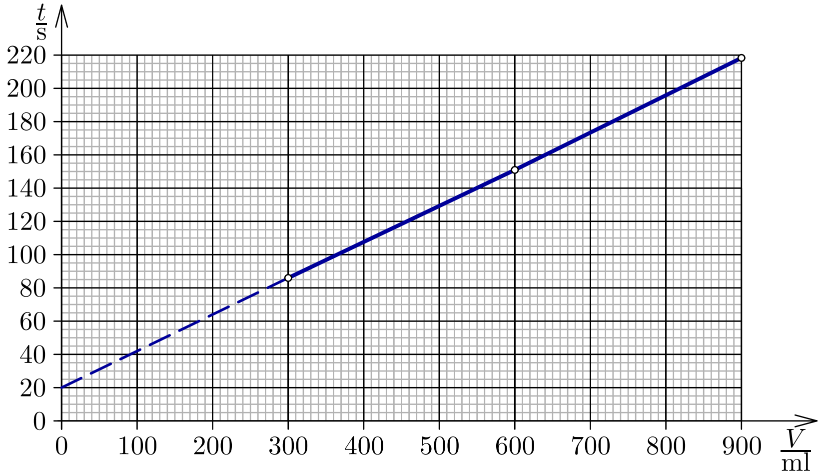
Lékaři při předepisování léků používají kapky jako jednotky hmotnosti nebo objemu roztoku.

FO63E1-12 (experimentální úloha): Rychlovarná konvice

Při kontrolním měření byla použita varná konvice s příkonem na štítku 1 370 W–1 630 W; pro výpočet tak použijeme průměrnou hodnotu $P_0 = 1\,500\,\mathrm{W}$, měření probíhalo v místnosti o teplotě $t_1 = 26\,^\circ\mathrm{C}$. Předpokládáme, že voda dosáhne varu při teplotě $t_\mathrm{v} = 100\,^\circ\mathrm{C}$ (závislost teploty varu na tlaku vzduchu zanedbáváme). Kromě hustoty vody $\varrho = 1\,\mathrm{g/cm^3} = 1\,\mathrm{g/ml} = 0{,}001\,\mathrm{kg/ml}$ použijeme měrnou tepelnou kapacitu vody $c = 4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)}$. Příklad naměřených a dopočítaných hodnot, které jsou zaokrouhleny na dvě platné číslice:

V	τ	$P_0\tau$	$V\varrho c\,(t_\mathrm{v} - t_1)$
300 ml	1 min 25,97 s $\doteq$ 86 s	130 kJ	93 kJ
600 ml	2 min 30,95 s $\doteq$ 151 s	230 kJ	190 kJ
900 ml	3 min 38,31 s $\doteq$ 218 s	330 kJ	280 kJ

Příklad grafu je na obr. 2.



Obr. 2: K řešení úlohy FO63E1-12

Vidíme, že závislost můžeme považovat za lineární (přesvědčit se o tom lze pomocí lineární regrese např. v Excelu; vychází $\{\tau\} \doteq 20 + 0{,}22 \cdot \{V\}$; tento krok ale není po řešitelích požadován), avšak nejde o přímou úměru; platí

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{151\,\mathrm{s}}{86\,\mathrm{s}} \doteq 1{,}8, \qquad \frac{\tau_3}{\tau_2} = \frac{218\,\mathrm{s}}{151\,\mathrm{s}} \doteq 1{,}4, \qquad \frac{\tau_3}{\tau_1} = \frac{218\,\mathrm{s}}{86\,\mathrm{s}} \doteq 2{,}5,$$

přičemž $V_2/V_1 = 2$, $V_3/V_2 = 3/2 = 1{,}5$ a $V_3/V_1 = 3$. Ve všech případech platí $P_0\tau > V\varrho c\,(t_\mathrm{v} - t_1)$, část dodané energie připadne na zahřátí konvice a ztráty do okolí. Varná konvice také většinou nevypíná přesně v okamžiku, kdy voda začíná vřít, ale o něco později.