Řešení úloh okresního kola 63. ročníku Fyzikální olympiády ve školním roce 2021/2022

Kategorie F

Autoři úloh: L. Richterek (1), J. Thomas (3) a I. Volf (2, 4)

FO63F2-1: Vasův běh

a) Vzdálenost mezi startem a kontrolou Mångsbodarna je podle obrázku $s_1 = 11\,\mathrm{km} + 13\,\mathrm{km} = 24\,\mathrm{km}$, stejná vzdálenost $s_2 = 24\,\mathrm{km}$ je i mezi kontrolami Mångsbodarna a Evertsberg. Vzdálenost mezi kontrolami Evertsberg a Hökberg $s_3 = 14\,\mathrm{km} + 9\,\mathrm{km} = 23\,\mathrm{km}$ a poslední úsek z Hökbergu do cíle měří $s_4 = 10\,\mathrm{km} + 9\,\mathrm{km} = 19\,\mathrm{km}$. Celá trasa závodu měří

$$s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 24\,\mathrm{km} + 24\,\mathrm{km} + 23\,\mathrm{km} + 19\,\mathrm{km} = 90\,\mathrm{km}.$$

Celkový čas Stanislava Řezáče vychází

$$t = 3{:}51{:}52 = 3\,\mathrm{h}\,51\,\mathrm{min}\,52\,\mathrm{s} \doteq 231{,}87\,\mathrm{min} \doteq 3{,}864\,4\,\mathrm{h}.$$

Průměrná rychlost pak vychází

$$v = \frac{s}{t} = \frac{90\,\mathrm{km}}{3{,}864\,4\,\mathrm{h}} \doteq 23{,}290\,\mathrm{km/h} \doteq 23\,\mathrm{km/h} \qquad (\doteq 6{,}5\,\mathrm{m/s}).$$ **2 body**

Úvahou ze skutečnosti, že na vzdálenost $s = 90\,\mathrm{km}$ potřeboval $t = 231{,}87\,\mathrm{min}$, na 1 km potřeboval v průměru

$$\frac{t}{s} = \frac{231{,}87\,\mathrm{min}}{90\,\mathrm{km}} \doteq 2{,}576\,3\,\mathrm{min/km} \doteq 2{,}6\,\mathrm{min/km}.$$ **2 body**

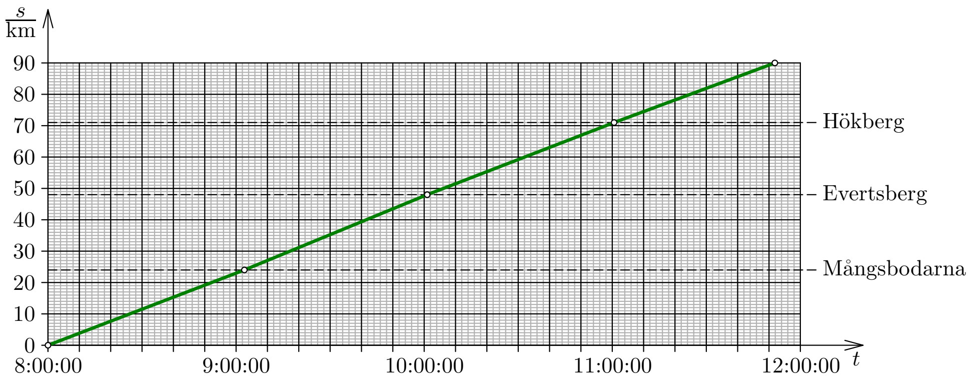
Poznámka: Vzhledem ke druhé části otázky můžeme (ale není to požadováno) rychlost vyjádřit v km/min jako

$$v = \frac{s}{t} = \frac{90\,\mathrm{km}}{231{,}87\,\mathrm{min}} \doteq 0{,}388\,15\,\mathrm{km/min} \doteq 0{,}39\,\mathrm{km/min}.$$

Čas potřebný na ujetí 1 km pak získáme jako převrácenou hodnotu

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{0{,}388\,15\,\mathrm{km/min}} \doteq 2{,}6\,\mathrm{min/km}.$$

b) Příklad grafu je na obr. 1, čas je vynášen v minutách (není to ale podmínkou).



Obr. 1: Graf závislost $s = s(t)$ k řešení úlohy FO63F2-1 **4 body**

c) Z grafu je zřejmé, že se jeho sklon skoro nemění, a proto ani rychlosti v jednotlivých úsecích se příliš nemění. Např. v prvním úseku Start–Mångsbodarna dostáváme

$$v_1 = \frac{s_1}{t_1} = \frac{24\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{h}\,2\,\mathrm{min}\,39\,\mathrm{s}} = \frac{24\,\mathrm{km}}{1{,}044\,2\,\mathrm{h}} \doteq 22{,}984\,\mathrm{km/h} \doteq 23\,\mathrm{km/h} \qquad (\doteq 6{,}4\,\mathrm{m/s}).$$

Podobně pro druhý úsek Mångsbodarna–Evertsberg vychází čas $t_2 - t_1 = 2\,\mathrm{h}\,0\,\mathrm{min}\,58\,\mathrm{s} - 1\,\mathrm{h}\,2\,\mathrm{min}\,39\,\mathrm{s} = 58\,\mathrm{min}\,19\,\mathrm{s} \doteq 0{,}971\,94\,\mathrm{h}$

$$v_2 = \frac{s_2}{t_2 - t_1} = \frac{24\,\mathrm{km}}{0{,}971\,94\,\mathrm{h}} \doteq 24{,}693\,\mathrm{km/h} \doteq 25\,\mathrm{km/h} \qquad (\doteq 6{,}9\,\mathrm{m/s}),$$

pro třetí úsek Evertsberg–Hökberg čas $t_3 - t_2 = 3\,\mathrm{h}\,35\,\mathrm{s} - 2\,\mathrm{h}\,58\,\mathrm{s} = 59\,\mathrm{min}\,37\,\mathrm{s} \doteq 0{,}993\,61\,\mathrm{h}$

$$v_3 = \frac{s_3}{t_3 - t_2} = \frac{23\,\mathrm{km}}{0{,}993\,61\,\mathrm{h}} \doteq 23{,}148\,\mathrm{km/h} \doteq 23\,\mathrm{km/h} \qquad (\doteq 6{,}4\,\mathrm{m/s}),$$

pro poslední úsek Hökberg–Cíl čas $t_4 - t_3 = 3\,\mathrm{h}\,51\,\mathrm{min}\,52\,\mathrm{s} - 3\,\mathrm{h}\,35\,\mathrm{s} = 51\,\mathrm{min}\,17\,\mathrm{s} \doteq 0{,}854\,72\,\mathrm{h}$

$$v_4 = \frac{s_3}{t_4 - t_3} = \frac{19\,\mathrm{km}}{0{,}854\,72\,\mathrm{h}} \doteq 22{,}230\,\mathrm{km/h} \doteq 22\,\mathrm{km/h} \qquad (\doteq 6{,}2\,\mathrm{m/s}).$$ **2 body**

Poznámka: Podle zadání stačí, když řešitelé určí průměrnou rychlost pouze v jednom z úseků. Údaje jsou převzaty z `https://results.vasaloppet.se`.

FO63F2-2: Mokrý sníh na střeše

a) Hmotnost sněhu na střeše je

$$m_1 = \varrho_1 dsh = 250\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 32\,\mathrm{m} \cdot 19{,}2\,\mathrm{m} \cdot 0{,}65\,\mathrm{m} = 99\,840\,\mathrm{kg} \doteq 100\,\mathrm{t}.$$

Na střechu působí silou

$$F_1 = m_1 g = 99\,840\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} = 978\,432\,\mathrm{N} \doteq 980\,\mathrm{kN}.$$

Poté, co sníh nataje, zmenší se výška sněhu, ale zvětší se jeho hustota, hmotnost ani síla, kterou působí na střechu, se nezmění (sublimaci a vypařování zanedbáváme). **3 body**

Na střechu napršelo $V_2 = 20\,\mathrm{l/m^2} = 0{,}02\,\mathrm{m^3/m^2}$, což odpovídá hmotnosti $m_2 = \varrho V_2 = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}020\,\mathrm{m^3/m^2} = 20\,\mathrm{kg/m^2}$, takže celková hmotnost vody na střeše o ploše $S = ds$ byla

$$m_\mathrm{v} = m_2 S = m_2 ds = 20\,\mathrm{kg/m^2} \cdot 32\,\mathrm{m} \cdot 19{,}2\,\mathrm{m} = 12\,288\,\mathrm{kg} \doteq 12\,\mathrm{t}.$$

Hustota sněhu se zvýšila, celková hmotnost mokrého sněhu je

$$m = m_1 + m_\mathrm{v} = 99\,840\,\mathrm{kg} + 12\,288\,\mathrm{kg} = 112\,128\,\mathrm{kg} \doteq 110\,\mathrm{t},$$

jež působí na střechu dílny silou

$$F_2 = m_2 g = 112\,128\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} = 1\,098\,854{,}4\,\mathrm{N} \doteq 1{,}1\,\mathrm{MN}.$$ **3 body**

b) Tlak na střechu určíme jako $p = F/S$, kde plocha střechy $S = ds = 32\,\mathrm{m} \cdot 19{,}2\,\mathrm{m} = 614{,}40\,\mathrm{m^2} \doteq 610\,\mathrm{m^2}$. Pro čerstvý sníh je tlak na střechu

$$p_1 = \frac{978\,432\,\mathrm{N}}{614{,}40\,\mathrm{m^2}} \doteq 1\,592{,}5\,\mathrm{Pa} \doteq 1{,}6\,\mathrm{kPa},$$

pro mokrý sníh

$$p_2 = \frac{1098854.4}{614{,}40\,\mathrm{m}^2} \doteq 1\,788{,}5\,\mathrm{Pa} \doteq 1{,}8\,\mathrm{kPa}.$$ **3 body**

c) Množství čerstvého sněhu na m^2 vychází

$$\frac{m}{S} = \frac{99\,840\,\mathrm{kg}}{614{,}40\,\mathrm{m}^2} \doteq 162{,}50\,\mathrm{kg/m}^2 \doteq 160\,\mathrm{kg/m}^2 > 56\,\mathrm{kg/m}^2.$$

Sníh překračuje hodnotu danou normou a takové kalamitní množství by vedlo k poškození střechy. **1 bod**

Poznámka: Hodnoty množství sněhu pro dovolené zatížení střech v různých oblastech ČR lze najít např. na `http://www.snihnastrese.cz/normove-zatizeni-snehovych-oblasti/`. V nížinách, kde jsou nejčastěji střechy rovné nebo s malým sklonem, jsou dovolené hodnoty zatížení podle ČSN nejmenší.

FO63F2-3: Malíř na prkně

a) Prkno na podpěrách můžeme považovat za páku. Má-li malíř kbelík v ruce, bude jeho tíha vyvážena pouze tíhou samotného prkna. Označíme-li vzdálenost x, do které může dojít za podpěru, pak podle podmínky rovnováhy vzhledem k bližší podpěře, kolem které by se páka začala otáčet, platí

$$(m_1 + m_2)gx \leqq mg\frac{l}{2},$$

odkud vyjádříme

$$x \leqq \frac{ml}{2\,(m_1 + m_2)} = \frac{21\,\mathrm{kg} \cdot 180\,\mathrm{cm}}{2 \cdot (72\,\mathrm{kg} + 18\,\mathrm{kg})} = 21\,\mathrm{cm}.$$ **3 body**

b) Pokud bude kbelík s barvou uprostřed prkna lešení, bude pro vzdálenost y, do které může malíř dojít, platit

$$m_1 gy \leqq (m + m_2)\,g\frac{l}{2},$$

odkud vyjádříme

$$y \leqq \frac{(m + m_2)\,l}{2m_1} = \frac{(21\,\mathrm{kg} + 18\,\mathrm{kg}) \cdot 180\,\mathrm{cm}}{2 \cdot 72\,\mathrm{kg}} = 48{,}75\,\mathrm{cm} \doteq 48\,\mathrm{cm}.$$

V tomto případě má smysl zaokrouhlovat dolů, protože při vyšší hodnotě by se prkno okolo podpěry otočilo. **3 body**

c) V tomto případě bude kbelík ve vzdálenosti $l_1 = 120\,\mathrm{cm} - 60\,\mathrm{cm} = 60\,\mathrm{cm} = l/3$ od podpěry blíže ke kbelíku a ve vzdálenosti $l + l/3 = 4l/3$ od podpěry blíže k malíři. Nyní opět můžeme zapsat podmínku rovnováhy, stojí-li malíř ve vzdálenosti z od podpěry blíže k němu, ve tvaru

$$m_1 gz \leqq mg\frac{l}{2} + m_2 g\frac{4}{3}l$$

a vyjádřit

$$z \leqq \frac{\frac{m}{2} + \frac{4m_2}{3}}{m_1}l = \frac{3m + 8m_2}{6m_1}l = \frac{3 \cdot 21\,\mathrm{kg} + 8 \cdot 18\,\mathrm{kg}}{6 \cdot 72\,\mathrm{kg}} \cdot 180\,\mathrm{cm} = 86{,}25\,\mathrm{cm} \doteq 86\,\mathrm{cm}.$$

4 body

FO63F2-4: Šplh na laně

a) Práce vykonaná Vaškem při šplhu je

$$W = Fs = mgh = 54\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 24\,\mathrm{m} \doteq 12\,701\,\mathrm{J} \doteq 13\,\mathrm{kJ}.$$ **3 body**

b) Doba šplhu vychází

$$t = \frac{W}{P} = \frac{mgh}{P} = \frac{54\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 24\,\mathrm{m}}{150\,\mathrm{W}} \doteq 84{,}672\,\mathrm{s} \doteq 85\,\mathrm{s}.$$ **3 body**

c) Pro průměrnou rychlost šplhu platí

$$v = \frac{h}{t} = \frac{24\,\mathrm{m}}{84{,}672\,\mathrm{s}} \doteq 0{,}283\,45\,\mathrm{m/s} \doteq 17\,\mathrm{m/min}.$$ **2 body**

d) Pro průměrnou rychlost šplhu by pak platilo

$$v = \frac{h}{t + t_1} = \frac{24\,\mathrm{m}}{84{,}672\,\mathrm{s} + 10\,\mathrm{s}} \doteq 0{,}253\,51\,\mathrm{m/s} \doteq 15\,\mathrm{m/min}.$$ **2 body**