Řešení úloh školního kola 63. ročníku Fyzikální olympiády ve školním roce 2021/2022

Kategorie G – Archimédiáda

Autoři úloh: D. Kaštilová (3–4), J. Thomas (1, 5), Всесибирская открытая олимпиада школьников по физике 2016 (2).

FO63G1-1: Předjíždění kamiónů

a) Vzhledem k prvnímu kamiónu musí řidič druhého kamiónu ujet vzdálenost

$$s = d + l_1 + l_2 + d = 50\,\mathrm{m} + 14\,\mathrm{m} + 16\,\mathrm{m} + 50\,\mathrm{m} = 130\,\mathrm{m}.$$

Vzájemná rychlost kamionů při předjíždění byla $v = v_2 - v_1 = 90\,\mathrm{km/h} - 81\,\mathrm{km/h} = 9\,\mathrm{km/h} = 2{,}5\,\mathrm{m/s}$, doba předjíždění vychází

$$t = \frac{s}{v} = \frac{130\,\mathrm{m}}{2{,}5\,\mathrm{m/s}} = 52\,\mathrm{s}.$$ **2 body**

b) Za tuto dobu ujede první kamion rychlostí $v_1 = 81\,\mathrm{km/h} = 22{,}5\,\mathrm{m/s}$ dráhu

$$s_1 = v_1 t = 22{,}5\,\mathrm{m/s} \cdot 52\,\mathrm{s} = 1\,170\,\mathrm{m} \doteq 1\,200\,\mathrm{m},$$

druhý kamion rychlostí $v_2 = 90\,\mathrm{km/h} = 25\,\mathrm{m/s}$ dráhu

$$s_2 = v_2 t = 25\,\mathrm{m/s} \cdot 52\,\mathrm{s} = 1\,300\,\mathrm{m}.$$ **2 body**

Poznámka: Úlohu lze řešit i ve vztažné soustavě spojené se Zemí; můžeme psát

$$s_2 = v_2 t = s_1 + s = v_1 t + s$$

odkud opět plyne

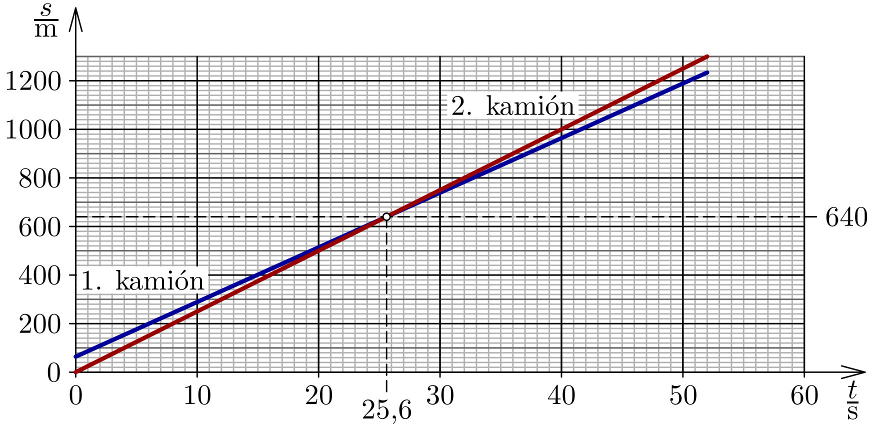
$$t = \frac{s}{v_2 - v_1}.$$

c) Polohu začneme měřit od místa, kde se nachází čelo druhého kamionu na počátku předjíždění, tj. $s_{20} = 0\,\mathrm{m}$. Čelo prvního kamionu je v tomto čase ve vzdálenosti $s_{10} = d + l_1 = 50\,\mathrm{m} + 14\,\mathrm{m} = 64\,\mathrm{m}$. Výsledky shrnuje tabulka:

t/s	0	52
První kamión s_1/m	64	$= 64 + 1170 = 1234 \doteq 1200$
Druhý kamión s_2/m	0	1300

Příklad grafu je na obr. 1. Souřadnice průsečíku přímek udávají dobu, za kterou dojede čelo druhého kamionu na úroveň čela prvního a vzdálenost, kterou přitom ujel. **3 body**

Poznámka: Výpočet souřadnic průsečíku, které jsou uvedeny v grafu, není po řešitelích požadován.



Obr. 1: K řešení úlohy FO63G1-1

d) Do ukončení předjíždění zbývá kamionu ještě ujet vzdálenost $s' = l_2 + d = 16\,\mathrm{m} + 50\,\mathrm{m} = 66\,\mathrm{m}$, k čemuž při vzájemné rychlosti $v = 2{,}5\,\mathrm{m/s}$ potřebuje ještě čas

$$t_1 = \frac{s'}{v} = \frac{66\,\mathrm{m}}{2{,}5\,\mathrm{m/s}} = 26{,}4\,\mathrm{s}.$$

Za tuto dobu ujede druhý kamión po silnici vzdálenost

$$s_{21} = v_2 t_1 = 25\,\mathrm{m/s} \cdot \frac{66\,\mathrm{m}}{2{,}5\,\mathrm{m/s}} = 25\,\mathrm{m/s} \cdot 26{,}4\,\mathrm{s} = 660\,\mathrm{m} < 1\,\mathrm{km}.$$

Stačí se tedy zařadit ještě před zúžením dálnice. **3 body**

Poznámka: Úlohu lze podobně jako část a) řešit i v soustavě spojené se Zemí, potom můžeme psát

$$v_2 t_1 = v_1 t_1 + s', \qquad \Longrightarrow \qquad t_1 = \frac{s'}{v_2 - v_1}.$$

FO63G1-2: Vadné siloměry

Podle 3. Newtonova zákona musí být síly, kterými siloměry na sebe vzájemně působí, stejné. Protože siloměry ukazovaly rozdílné údaje, bylo Renátě zřejmé, že alespoň jeden ze siloměrů neukazuje správně. **3 body**

Pro určení síly, kterou byly natahovány siloměry, můžeme vyzkoušet různé kombinace možností. Pokud siloměr ukazuje o 20 % více, ukazuje 120 % skutečné hodnoty síly, kterou získáme např. pro 6,1 N podle vztahu

$$F = \frac{6{,}1\,\mathrm{N}}{1{,}2} \doteq 5{,}083\,3\,\mathrm{N} \doteq 5{,}1\,\mathrm{N}.$$

Pokud naopak ukazuje o 20 % méně, ukazuje 80 % skutečné hodnoty, která analogicky vychází

$$F = \frac{6{,}1\,\mathrm{N}}{0{,}8} = 7{,}625\,\mathrm{N} \doteq 7{,}6\,\mathrm{N}.$$

V tabulce jsou skutečné hodnoty měřené síly při různých možných chybách siloměrů:

Ukazuje	chyba +1,1 N	chyba −1,1 N	chyba +20 %	chyba −20 %
6,0 N	4,9 N	7,1 N	5,0 N	7,5 N
6,1 N	5,0 N	7,2 N	$\doteq$ 5,1 N	$\doteq$ 7,6 N

Vidíme, že stejnou sílu 5,0 N dostaneme v případě, že první siloměr ukazuje o 20 % více a druhý o 1,1 N více, Renáta odtahovala každý ze siloměrů silou 5 N. **7 bodů**

Poznámka: K plnému bodovému zisku není nutná celá tabulka, ale požadujeme zdůvodnění správného řešení s konkrétními hodnotami na siloměrech a chybami, s jakými ukazují.

FO63G1-3: Prázdniny u jezera

a) V prvním úseku D–N vychází průměrná rychlost automobilu

$$v_1 = \frac{s_1}{t_1} = \frac{4\,\mathrm{km}}{5\,\mathrm{min}} = \frac{4\,\mathrm{km}}{\dfrac{1}{12}\mathrm{h}} = 48\,\mathrm{km/h} = \frac{4}{5}\,\mathrm{km/min} \doteq 13\,\mathrm{m/s}.$$

Ve druhém úseku N–Z dostáváme čas jízdy vlakem

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{5\,\mathrm{km}}{50\,\mathrm{km/h}} = 0{,}1\,\mathrm{h} = 6{,}0\,\mathrm{min}.$$

Ve třetím úseku Z–K ujel autobusem vzdálenost

$$s_3 = v_3 t_3 = 45\,\mathrm{km/h}\cdot 4\,\mathrm{min} = 45\,\mathrm{km/h}\cdot\frac{4}{60}\,\mathrm{h} = 3{,}0\,\mathrm{km}.$$

Ve čtvrtém úseku K–M šel průměrnou rychlostí za dobu $t_4 = 0{,}4\,\mathrm{h} = 24\,\mathrm{min}$

$$v_4 = \frac{s_4}{t_4} = \frac{2\,\mathrm{km}}{0{,}4\,\mathrm{h}} = 5{,}0\,\mathrm{km/h} \doteq 83\,\mathrm{m/min} \doteq 1{,}4\,\mathrm{m/s}.$$

Ve posledním pátém úseku M–S ušel za čas $t_5 = 0{,}25\,\mathrm{h} = 15\,\mathrm{min}$ vzdálenost

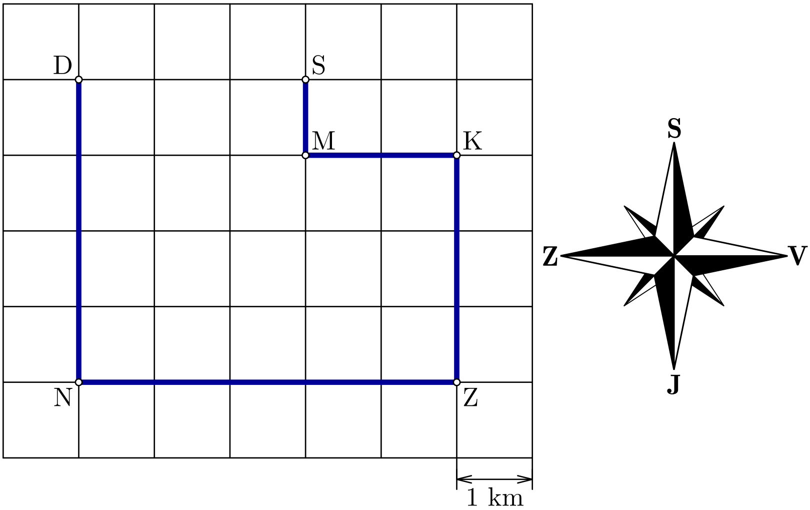
$$s_5 = v_5 t_5 = 4\,\mathrm{km/h}\cdot 0{,}25\,\mathrm{h} = 4\,\mathrm{km/h}\cdot\frac{1}{4}\,\mathrm{h} = 1{,}0\,\mathrm{km}.$$

Vyplněná tabulka s rychlostmi v km/h a časy v minutách pak bude:

Úsek	Směr	Vzdálenost	Průměrná rychlost	Čas
D–N	na jih (J)	4,0 km	48 km/h	5,0 min
N–Z	na východ (V)	5,0 km	50 km/h	6,0 min
Z–K	na sever (S)	3,0 km	45 km/h	4,0 min
K–M	na západ (Z)	2,0 km	5,0 km/h	24 min
M–S	na sever (S)	1,0 km	4,0 km/h	15 min

3 body

Příklad náčrtu „mapy“ pohybu Kryšpína je na obr. 2. **2 body**



Obr. 2: K řešení úlohy FO63G1-3

b) Z obr. 2 je zřejmé, že nejkratší vzdušná vzdálenost mezi domovem D a srubem S je $s = 3{,}0\,\mathrm{km}$. **1 bod**

c) Kryšpínovi trvala cesta i s časem na přestup $t_\mathrm{p} = 16\,\mathrm{min}$ celkem

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_\mathrm{p} = (5{,}0 + 6{,}0 + 4{,}0 + 24{,}0 + 15{,}0 + 16{,}0)\ \mathrm{min} = 70\,\mathrm{min},$$

ke srubu dorazí po 1 hodině a 10 minutách, tj. v 10:10. **1 bod**

d) Z náčrtu je zřejmé, že srub leží na východ od domova, Vendelín musí jet s loďkou na východ. Pro jeho průměrnou rychlost dostáváme

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{t} = \frac{3{,}0\,\mathrm{km}}{\dfrac{70}{60}\,\mathrm{h}} \doteq \frac{3{,}0\,\mathrm{km}}{1{,}166\,7\,\mathrm{h}} \doteq \mathrm{km/h} \doteq 2{,}571\,4\,\mathrm{km/h} \doteq 2{,}6\,\mathrm{km/h}. \qquad \textbf{2 body}$$

Rychlost lze vyjádřit i v jiných jednotkách jako $v_\mathrm{p} \doteq 43\,\mathrm{m/min} \doteq 0{,}71\,\mathrm{m/s}$. Protože Kryšpín urazil za stejnou dobu větší vzdálenost, bude jeho průměrná rychlost větší. **1 bod**

Poznámka: Celým výpočtem, který není požadován, zjistíme, že Kryšpín svou okružní cestou překonal vzdálenost

$$s' = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = (4{,}0 + 5{,}0 + 3{,}0 + 2{,}0 + 1{,}0)\ \mathrm{km} = 15\,\mathrm{km} = 5s,$$

jeho průměrná rychlost tak byla 5krát větší, tj.

$$v'_\mathrm{p} = \frac{s'}{t} = \frac{15{,}0\,\mathrm{km}}{\dfrac{70}{60}\,\mathrm{h}} \doteq \frac{15{,}0\,\mathrm{km}}{1{,}166\,7\,\mathrm{h}} \doteq \mathrm{km/h} \doteq 12{,}857\,\mathrm{km/h} \doteq 13\,\mathrm{km/h}.$$

FO63G1-4: Jednoduchý kladkostroj

a) Objem cihly vychází

$$V = 29\,\mathrm{cm} \times 14\,\mathrm{cm} \times 6{,}5\,\mathrm{cm} = 2\,639\,\mathrm{cm}^3.$$

Při hustotě $\varrho = 1\,500\,\mathrm{kg/m^3} = 1{,}5\,\mathrm{g/cm^3}$ pak dostáváme hmotnost jedné cihly

$$m_1 = \varrho V = 1{,}5\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 2\,639\,\mathrm{cm}^3 = 3\,958{,}5\,\mathrm{g} \doteq 4{,}0\,\mathrm{kg}.$$ **2 body**

b) Pokud Kryšpín táhl za lano silou $F = 134\,\mathrm{N}$, byla tíha volné kladky a koše i s nákladem rovna $2F = 2 \cdot 134\,\mathrm{N} = 268\,\mathrm{N}$, což odpovídá celkové zdvihané hmotnosti

$$m_\mathrm{n} = \frac{2F}{g} = \frac{268\,\mathrm{N}}{9{,}8\,\mathrm{N/kg}} \doteq 27{,}347\,\mathrm{kg} \doteq 27\,\mathrm{kg}.$$

Z toho celková hmotnost kladky a koše vychází $m_\mathrm{k} = 1{,}2\,\mathrm{kg} + 2{,}1\,\mathrm{kg} = 3{,}3\,\mathrm{kg}$ a na cihly zbývá

$$m_\mathrm{c} = m_\mathrm{n} - m_\mathrm{k} = 27{,}347\,\mathrm{kg} - 3{,}3\,\mathrm{kg} = 24{,}047\,\mathrm{kg} \doteq 24\,\mathrm{kg}.$$

V koši bylo celkem

$$n = \frac{m_\mathrm{c}}{m_1} = \frac{24\,\mathrm{kg}}{4{,}0\,\mathrm{kg}} = 6\ \text{cihel}.$$ **4 body**

c) Položil dvě cihly vedle sebe největší plochou ($29\,\mathrm{cm} \times 14\,\mathrm{cm}$) na dno koše, do šířky koše 28 cm se vejdou vedle sebe 2 cihly o šířce 14 cm. Do výšky cihly tvořily tři vrstvy, $2 \times 3 = 6$ cihel. **2 body**

Plocha dna koše je

$$S = 29\,\mathrm{cm} \times 28\,\mathrm{cm} = 812\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}081\,2\,\mathrm{m}^2,$$

tíha 6 cihel vychází

$$F_\mathrm{g} = n m_1 g = 6 \cdot 3{,}958\,5\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} = 232{,}76\,\mathrm{N}$$

a pro tlak na dno koše

$$p = \frac{F_\mathrm{g}}{S} = \frac{232{,}76\,\mathrm{N}}{0{,}081\,2\,\mathrm{m}^2} \doteq 2\,866{,}5\,\mathrm{Pa} \doteq 2{,}9\,\mathrm{kPa}.$$ **2 body**

Poznámka: Tíhu cihel lze získat i z celkové hmotnosti cihel

$$F_\mathrm{g} = m_\mathrm{c} g = 24{,}047\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} = 235{,}66\,\mathrm{N}$$

a tlak pak vychází

$$p = \frac{F_\mathrm{g}}{S} = \frac{235{,}66\,\mathrm{N}}{0{,}081\,2\,\mathrm{m}^2} \doteq 2\,902{,}2\,\mathrm{Pa} \doteq 2{,}9\,\mathrm{kPa},$$

což je v rámci zaokrouhlení a přesnosti zadaných hodnot stejný výsledek.

FO63G1-5 (experimentální úloha):
Hustota lidského těla a objem vzduchu v plicích

Údaje z různých zdrojů se mohou lišit. Např. tabulky udávají po nadechnutí $960\,\mathrm{kg/m^3}$, po výdechu $1\,040\,\mathrm{kg/m^3}$ (Běloun F. a kol., 2018. *Tabulky pro základní školu*. Praha, Prometheus) nebo $950\,\mathrm{kg/m^3}$, resp. $1\,050\,\mathrm{kg/m^3}$ (Mikulčák J. a kol., 2011. *Matematické, fyzikální a chemické tabulky & vzorce pro střední školy*. Praha, Prometheus). Na Wikipedii (`https://cs.wikipedia.org/wiki/Hustoty_l%C3%A1tek`) najdeme $\varrho_1 = 945\,\mathrm{kg/m^3}$ a $\varrho_2 = 1\,025\,\mathrm{kg/m^3}$. Doporučujeme uznat nejen tyto různé možnosti, hodnoty by neměly být mimo interval $\langle 940\,\mathrm{kg/m^3}, 1\,050\,\mathrm{kg/m^3}\rangle$. **1 bod**

Poznámka: V příkladu možného řešení budeme uvádět orientační výsledky vycházející z hodnot na Wikipedii, které pravděpodobně využije největší část řešitelů.

a) Hustotu ovlivňuje stavba těla a zastoupení jednotlivých částí, např. kosti mají větší hustotu (okolo $1\,800\,\mathrm{kg/m^3}$), naopak tuky menší (okolo $940\,\mathrm{kg/m^3}$). **1 bod**

b) Vycházíme-li z vyhledaných hustot těla, můžeme objem těla odhadnout ze změřené hmotnosti, např. pro $m = 60\,\mathrm{kg}$ dostáváme

$$V_1 = \frac{m}{\varrho_1} = \frac{60\,\mathrm{kg}}{945\,\mathrm{kg/m^3}} \doteq 0{,}063\,492\,\mathrm{m^3} \doteq 63\,\text{litrů po nadechnutí;}$$
$$V_2 = \frac{m}{\varrho_2} = \frac{60\,\mathrm{kg}}{1\,025\,\mathrm{kg/m^3}} \doteq 0{,}058\,537\,\mathrm{m^3} \doteq 59\,\text{litrů po vydechnutí.}$$

2 body

c) Při nadechnutí plave tělo na hladině, vztlaková síla je rovna tíhové síle, tedy např. pro uvažovanou hmotnost $m = 60\,\mathrm{kg}$, vychází $F_{\mathrm{vz1}} = mg = 60\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} = 588\,\mathrm{N} \doteq 590\,\mathrm{N}$. **1 bod**

Po vydechnutí – jak víme ze zkušenosti i z hodnoty hustoty těla větší než hustota vody – se tělo potopí pod hladinu, vztlaková síla bude odpovídat tíze vody o objemu V_2, tj. $F_{\mathrm{vz2}} = V_2\varrho g = 0{,}058\,537\,\mathrm{m^3} \cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} = 573{,}66\,\mathrm{N} \doteq 570\,\mathrm{N}$. **2 body**

Poznámka: Pro lidi s větším zastoupením tělesných tuků nemusí být ani hustota těla po výdechu větší než hustota vody a tělo může plavat při hladině i v tomto případě.

d) Při běžném dýchání je objem vydechnutého vzduchu přibližně 0,5 litru. Kromě toho zůstává po běžném výdechu v plicích ještě tzv. expirační rezervní objem okolo 1,5 litru. **3 body**