Řešení úloh 1. kola 64. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Autoři úloh: J. Thomas (1), J. Jírů (3, 4, 5, 7), P. Šedivý (2, 6)

1.a) Ze vztahu pro účinnost lze odvodit, že

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}. \tag{1}$$

Zde platí $Q_2 = Q_1 + W$, kde W je práce, kterou musíme dodat, Q_2 je teplo předané ohřívači a Q_1 je teplo odebrané chladiči. Teplota ohřívače T_2 je teplota vroucí vody, která zůstává na hodnotě $T_2 = 373$ K. Teplota T_1 se ale bude měnit; nejprve se bude ochlazovat voda z 30 °C na 0 °C. Přitom bude chladiči odebráno teplo

$$Q_1 = m_1 c_1 \Delta t_1,$$

kde $\Delta t_1 = 30$ °C. Z rovnice (1)

$$Q_2 = \frac{T_2}{\overline{T}} m_1 c_1 \Delta t_1,$$

kde $\overline{T} = 288$ K, protože průběh teploty považujeme podle zadání za lineární (dosadíme její průměrnou hodnotu). Q_2 je teplo odebrané chladiči, proto platí

$$Q_2 = l_v \Delta m_2 = \frac{T_2}{\overline{T}} m_1 c_1 \Delta t_1 \quad \Rightarrow \quad \Delta m_2 = \frac{T_2}{\overline{T}} \frac{c_1 m_1 \Delta t_1}{l_v} = 0{,}22 \text{ kg}.$$

Pro vykonanou práci platí

$$W = Q_2 - Q_1 = \left(\frac{T_2}{\overline{T}} - 1\right) c_1 m_1 \Delta t_1 = 110 \text{ kJ}.$$ **4 body**

b) Chladiči je odebráno teplo

$$Q_1 = m_1 l_t,$$

ohřívač přijme teplo

$$Q_2 = \frac{T_2}{T_1'} Q_1 = \frac{T_2}{T_1'} m_1 l_t,$$

kde $T_1' = 273$ K je teplota tuhnutí vody. Stroj přitom vykoná práci

$$W = Q_2 - Q_1 = \left(\frac{T_2}{T_1'} - 1\right) m_1 l_t = 370 \text{ kJ}.$$

V ohřívači zůstalo ještě

$$\Delta m_2' = m_2 - \frac{T_2}{\overline{T}} \frac{c_1 m_1 \Delta t_1}{l_v} - \frac{T_2}{T_1'} \frac{Q_1}{l_v} = m_2 - \frac{T_2}{\overline{T}} \frac{c_1 m_1 \Delta t_1}{l_v} - \frac{T_2}{T_1'} \frac{m_1 l_t}{l_v} = 0{,}18 \text{ kg vody},$$

na jejíž vypaření ještě musí být chladiči odebráno teplo

$$Q_1' = m_1 c_2 \Delta t_2,$$

kde Δt_2 je změna teploty ledu. Protože se teplota chladiče podle zadání mění lineárně, musí platit

$$m_1c_2\Delta t_2 = \frac{T_1' - \dfrac{\Delta t_2}{2}}{T_2} l_v\Delta m_2' \quad \Rightarrow \quad \Delta t_2 = \frac{2T_1' l_v \Delta m_2'}{2m_1c_2T_2 + l_v\Delta m_2'} = 43\ °\mathrm{C}.$$

Teplota ledu se sníží na -43 °C. **4 body**

c) Během celého procesu stroj vykonal práci

$$W = \left(\frac{T_2}{\overline{T}} - 1\right) c_1m_1\Delta t_1 + \left(\frac{T_2}{T_1'} - 1\right) m_1l_t + \left(1 - \frac{T_1' - \dfrac{\Delta t_2}{2}}{T_2}\right) l_v\Delta m_2'.$$

Ohřívači bylo dodáno teplo

$$Q = \frac{T_2}{\overline{T}} c_1m_1\Delta t_1 + \frac{T_2}{T_1'} m_1l_t + l_v\Delta m_2'.$$

Poměr těchto dvou veličin udává účinnost:

$$\eta = \frac{W}{Q} = 27\ \%.$$ **2 body**

Variantní řešení s postupným dosazováním:

a) Chladiči bude odebráno teplo

$$Q_1' = m_1c_1\Delta t_1 = 0{,}38\ \mathrm{MJ},\ \text{kde}\ \Delta t_1 = 30\ °\mathrm{C}.$$

Dosadíme do vztahu (1) za teplotu T_1. Protože průběh teploty považujeme podle zadání za lineární, dosadíme její průměrnou hodnotu, tedy T_1'= 288 K. Teplo přijaté ohřívačem bude $Q_2' = \frac{T_2}{T_1'} Q_1' = 0{,}49$ MJ.

Dodáním tohoto tepla vznikne v ohřívači $\Delta m_2 = \frac{Q_2'}{l_v} = 0{,}22$ kg vodní páry. Tepelný stroj přitom dodal práci $W_1 = Q_2' - Q_1' = 0{,}11$ MJ. **4 body**

b) Při dalším odebírání tepla chladiči bude voda v něm zamrzat, teplota chladiče se nebude měnit, dokud voda nezamrzne. Chladiči bude odebráno teplo $Q_1'' = m_1l_t = 1{,}0$ MJ, ohřívač přijme teplo

$$Q_2'' = \frac{T_2}{T_1''} Q_1'' = 1{,}37\ \mathrm{MJ},$$

kde $T_1'' = 273$ K je teplota tuhnoucí vody. Přitom se v ohřívači vypaří

$$\Delta m_2'' = \frac{Q_2''}{l_v} = 0{,}61\ \text{kg vody}$$

a stroj vykonal práci

$$W_2 = Q_2'' - Q_1'' = 0{,}37\ \mathrm{MJ}.$$

V ohřívači ještě zůstalo

$$\Delta m_2''' = m_2 - \Delta m_2 - \Delta m_2'' = 0{,}18\ \mathrm{kg}$$

vroucí vody. Na její vypaření musí být ještě dodáno teplo

$$Q_2''' = l_v\Delta m_2''' = 0{,}40\ \mathrm{MJ}.$$

Ledu přitom musí být odebráno teplo

$$Q_1''' = m_1 c_2 \Delta t_2,$$

kde Δt_2 je změna teploty ledu. Protože se podle zadání teplota chladiče mění lineárně, bude teplota

$$T_1''' = T_1'' - \frac{\Delta t_2}{2}.$$

Ze vztahu (1) pak $Q_1''' = \frac{T_1'''}{T_2} Q_2'''$ a po dosazení

$$m_1 c_2 \Delta t_2 = \frac{T_1'' - \frac{\Delta t_2}{2}}{T_2} Q_2''' \quad \Rightarrow \quad \Delta t_2 = \frac{2 T_1'' Q_2'''}{2 m_1 c_2 T_2 + Q_2'''} = 43\ °\mathrm{C}.$$

Teplota ledu v chladiči tedy klesne na –43 °C. **4 body**

Tepelný stroj přitom vykoná práci

$$W_3 = Q_2''' - Q_1''' = Q_2''' \left(1 - \frac{T_1'''}{T_2}\right) = 0{,}40 \left(1 - \frac{252}{373}\right) \mathrm{MJ} = 0{,}13\ \mathrm{MJ}.$$

c) Během celého procesu stroj vykonal práci $W = W_1 + W_2 + W_3 = 0{,}61$ MJ. Ohřívači přitom bylo předáno teplo

$$Q_2 = Q_2' + Q_2'' + Q_2''' = 0{,}49\ \mathrm{MJ} + 1{,}37\ \mathrm{MJ} + 0{,}40\ \mathrm{MJ} = 2{,}26\ \mathrm{MJ}.$$

Účinnost tepelného stroje

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = \frac{W_1 + W_2 + W_3}{Q_2' + Q_2'' + Q_2'''} = 27\ \%.$$

2 body

Poznámka: Přesnější výsledky bychom dostali použitím integrálního počtu, rozdělením procesu na nekonečně malé úseky. Pak můžeme pro první fázi práce čerpadla napsat

$$\mathrm{d}Q_2 = T_2 \frac{\mathrm{d}Q_1}{T_1} = T_2 \frac{m_1 c_1 \mathrm{d}T_1}{T_1} \quad \Rightarrow \quad Q_2' = m_1 c_1 T_2 \ln \frac{T_1}{T_1''}.$$

Odchylka činí jen asi 0,1 %.

2.a) Označme R' odpor smyčky mezi uzly A, B; y odpor části BC reostatu; u úbytek napětí v části AB reostatu, a to ve větvích ArB i AxB; u' úbytek napětí v části obvodu BC; spotřebičem o odporu r protéká proud I_1, částí reostatu o odporu x proud I_2.

Proud I procházející obvodem připojeným na konstantní napětí U se v uzlech A, B větví. Podle Ohmova zákona protéká větví ArB proud $I_1 = \frac{u}{r}$, větví AxB proud $I_2 = \frac{u}{x}$ a smyčkou AB proud

$$I = \frac{u}{R'}. \tag{1}$$

Pro proudy protékající uzlem A platí

$$I = I_1 + I_2. \tag{2}$$

Tedy
$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{r} + \frac{1}{x} = \frac{r+x}{rx}, \text{ takže } R' = \frac{rx}{r+x}. \tag{3}$$
Předpokládáme-li, že odporový drát reostatu je z homogenního materiálu a má na všech místech stejný průměr, pak je odpor kterékoli části reostatu dán vztahem
$$R = \varrho \cdot \frac{l}{S}.$$
Dále budeme předpokládat, že odporový drát reostatu je navinut na válci z izolačního materiálu stejně hustě. Pak na délku reostatu $l = \mathrm{DC}$ připadá odpor R, na jednotkovou délku odpor $\frac{R}{l}$, na délku $l_1 = \mathrm{DB}$ odpor $x = \frac{R}{l} \cdot l_1$ a na délku $\mathrm{BC} = l - l_1$ odpor
$$y = \frac{R}{l} \cdot (l - l_1) = R - x. \tag{4}$$
2 body

Smyčka ArBxA o odporu R' a část BC potenciometru o odporu y jsou spojeny sériově. Proto jimi protéká stejný proud I, takže podle Ohmova zákona platí $u = R' \cdot I$, $u' = y \cdot I$. Jestliže zanedbáme odpor přívodních vodičů, pak úbytek napětí na dvou nebo více sériově zapojených spotřebičích je roven součtu úbytků napětí na jednotlivých spotřebičích. Proto je v našem případě
$$U = u + u' = I\,(R' + y) \ \text{ a } \quad I = \frac{U}{R' + y}.$$
Do tohoto výrazu dosadíme za R' a y ze vztahů (3) a (4) a pravou stranu upravíme:
$$I = \frac{U}{\dfrac{rx}{r+x} + R - x} = \frac{r+x}{rx + Rr - rx + Rx - x^2}U = \frac{r+x}{R(r+x) - x^2}U.$$
Hodnota nerozvětveného proudu je
$$I = \frac{r+x}{R(r+x) - x^2}U. \tag{5}$$
2 body

Napětí u na rezistoru r má podle Ohmova zákona hodnotu $u = R'I$. Podle vztahů (3) a (5) je
$$u = \frac{rx}{r+x} \cdot \frac{r+x}{R(r+x) - x^2} \cdot U = \frac{rx}{R(r+x) - x^2}U. \tag{6}$$
1 bod

Z podmínky $u = \frac{U}{2}$ plyne po použití vztahu (6) pro neznámý odpor x rovnice
$$\frac{\mathrm{rx}}{R(r+x) - x^2} = \frac{1}{2}.$$
Z této rovnice vypočítáme x:
$$2rx = Rr + Rx - x^2$$

$$x^2 + (2r - R)x - Rr = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{(R - 2r) \pm \sqrt{4r^2 + R^2 - 4Rr + 4Rr}}{2}$$

$$x_1 = \frac{(R - 2r) + \sqrt{4r^2 + R^2}}{2};$$

$$x_2 = \frac{(R - 2r) - \sqrt{4r^2 + R^2}}{2}.$$ **1 bod**

Fyzikální význam odporu mohou mít jen takové hodnoty x_1 a x_2, které jsou vyjádřeny reálnými a nezápornými čísly. Proto musíme provést diskusi obou kořenů.

Reálné hodnoty mají oba kořeny pro všechna r a R, neboť diskriminant rovnice je kladný.

Kořen x_2 je nutně záporný, jestliže $R - 2r \leq 0$. Nezápornou hodnotu by měl jen tehdy, kdyby $R - 2r \geq \sqrt{4r^2 + R^2}$. Protože obě strany nerovnosti jsou kladné, dostaneme po umocnění ekvivalentní nerovnost $R^2 + 4r^2 - 4rR \geq 4r^2 + R^2$, což je nerovnost nesprávná, neboť $r > 0$ a $R > 0$. Proto není možné, aby $R - 2r \geq \sqrt{4r^2 + R^2}$. Kořen x_2 nemá fyzikální význam odporu pro žádné hodnoty R a r.

Kořen x_1 má kladnou hodnotu vždy, jestliže $R - 2r \geq 0$; je-li $R - 2r < 0$, pak tehdy, když $|R - 2r| < \sqrt{R^2 + 4r^2}$. Poněvadž však $|R - 2r| = 2r - R$, přejde předcházející nerovnost v novou $2r - R < \sqrt{R^2 + 4r^2}$. Protože obě strany nerovnosti jsou kladná čísla, dojdeme po umocnění k nerovnosti $4r^2 + R^2 - 4rR < R^2 + 4r^2$, což je nerovnost správná pro všechna $r > 0$ a $R > 0$. Proto je správná i nerovnost $|R - 2r| < \sqrt{R^2 + 4r^2}$. Kořen x_1 má fyzikální význam odporu pro všechna R a r, jestliže je vyhověno podmínce $u = \frac{U}{2}$. **1 bod**

V případě c) má odpor x hodnotu

$$x_1 = \frac{R - 2r + \sqrt{4r^2 + R^2}}{2}. \tag{7}$$

Velikost proudu I určíme v tomto případě nejsnáze ze vztahu (1), ve kterém dosadíme za R' hodnotu ze vztahu (3), takže

$$I = u\frac{r + x}{rx}.$$

Dosadíme-li za $u = \frac{U}{2}$ a za x hodnotu x_1 z rovnice (7), postupnými úpravami dostaneme

$$I = \frac{U}{2} \cdot \frac{r + \frac{R - 2r + \sqrt{R^2 + 4r^2}}{2}}{r\frac{R - 2r + \sqrt{R^2 + 4r^2}}{2}} = \frac{U}{2} \cdot \frac{R + \sqrt{R^2 + 4r^2}}{r\left(R - 2r + \sqrt{R^2 + 4r^2}\right)},$$

$$I = \frac{U}{2} \cdot \frac{\left(R + \sqrt{R^2 + 4r^2}\right) \cdot (R - \sqrt{R^2 + 4r^2} - 2r)}{r\left[(R - 2r)^2 - (R^2 + 4r^2)\right]},$$

$$I = \frac{U}{2} \cdot \frac{\left[R^2 - \left(R^2 + 4r^2\right)\right] - 2r\left(R + \sqrt{R^2 + 4r^2}\right)}{r \cdot (-4Rr)},$$

$$I = \frac{U}{2} \cdot \frac{-4r^2 - 2rR - 2r \cdot \sqrt{R^2 + 4r^2}}{-4Rr^2},$$

$$I = \frac{U}{2} \cdot \frac{2r\left(2r + R + \sqrt{R^2 + 4r^2}\right)}{4Rr^2} = \frac{R + 2r + \sqrt{R^2 + 4r^2}}{4Rr} \cdot U.$$

Je-li $u = \frac{U}{2}$, má proud velikost

$$I = \frac{R + 2r + \sqrt{R^2 + 4r^2}}{4Rr} U. \tag{8}$$

1 bod

Má-li spotřebič při napětí $u = 110$ V příkon $P = 242$ W, je jeho odpor

$$r = \frac{u}{I_1} = \frac{u^2}{I_1 u} = \frac{u^2}{P} = 50\ \Omega.$$

Protože je splněna podmínka $u = \frac{U}{2}$ části c) této úlohy, je podle vztahu (7)

$$x = \frac{150 - 100 + \sqrt{150^2 + 4 \cdot 50^2}}{2}\ \Omega = 120\ \Omega.$$

Podle (8) je

$$I = \frac{150 + 100 + \sqrt{150^2 + 4 \cdot 50^2}}{4 \cdot 150 \cdot 50}\ \mathrm{A} = 3{,}15\ \mathrm{A}.$$

Poněvadž reostatem smí procházet proud nejvýše 2,5 A a ve skutečnosti při daných podmínkách by obvodem procházel proud 3,15 A $>$ 2,5 A, není toto zapojení možné. Částí BC reostatu by procházel proud příliš veliký a poškodil by reostat.

2 body

3. Raketa zůstává v klidové poloze do času 2,0 s, kdy nastane rovnost velikostí tahové a tíhové síly, poté se uvede do pohybu.
Označme $t_1 = 2{,}0$ s čas počátku pohybu rakety, $t_2 = 3{,}6$ s čas maximálního tahu, $t_3 = 5{,}4$ s čas ukončení tahu, t_4 neznámý čas dopadu rakety na zem.
Na prvním úseku, kde $t \in \langle 0; t_1 \rangle$, zůstává raketa v klidu:

$$a_{y1}(t) = 0,\ v_{y1}(t) = 0,\ y_1(t) = 0.$$

Na každém z dalších úseků budeme pro jednoduchost měřit čas od nuly.
Tedy na druhém úseku pro $t \in \langle 0; t_2 - t_1 \rangle = \langle 0; 1{,}6\ \mathrm{s} \rangle$ platí:

$$a_{y2}(t) = \frac{0{,}8g}{t_2 - t_1} t = 5t \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-3} \text{ s konečnou hodnotou } a_{y2}(1{,}6\ \mathrm{s}) = 8\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2},$$

$$v_{y2}(t) = \int a_{y2}(t) \mathrm{d}t = \int 5t \mathrm{d}t \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-3} = \frac{5}{2} t^2 \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-3}$$

s konečnou hodnotou $v_{y2}(1{,}6\ \mathrm{s}) = 6{,}4\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$,

$$y_2(t) = \int v_{y2}(t) \mathrm{d}t = \int \frac{5}{2} t^2 \mathrm{d}t \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-3} = \frac{5}{6} t^3 \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-3}$$

s konečnou hodnotou $y_2(1{,}6\ \mathrm{s}) = 3{,}41$ m. **3 body**

Na třetím úseku pro $t \in \langle 0; t_3 - t_2 \rangle = \langle 0; 1{,}8\ \mathrm{s} \rangle$ platí

$a_{y3}(t) = \left(8 - 10t \cdot \mathrm{s}^{-1}\right) \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ s konečnou hodnotou $a_{y3}(1{,}8\ \mathrm{s}) = -10\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$,

$$v_{y3}(t) = v_{y2}(1{,}6\ \mathrm{s}) + \int a_{y3}(t)\mathrm{d}t = 6{,}4\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} + \int \left(8 - 10t \cdot \mathrm{s}^{-1}\right) \mathrm{d}t \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2} = \\ = \left(6{,}4 + 8t \cdot \mathrm{s}^{-1} - 5t^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}\right) \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

s konečnou hodnotou $v_{y3}(1{,}8\ \mathrm{s}) = 4{,}6\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$,

$$y_3(t) = y_2(1{,}6\ \mathrm{s}) + \int v_{y3}(t)\mathrm{d}t = 3{,}41\ \mathrm{m} + \int \left(6{,}4 + 8t \cdot \mathrm{s}^{-1} - 5t^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}\right) \mathrm{d}t \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} = \\ = \left(3{,}41 + 6{,}4t \cdot \mathrm{s}^{-1} + 4t^2 \cdot \mathrm{s}^{-2} - \frac{5}{3}t^3 \cdot \mathrm{s}^{-3}\right) \mathrm{m}$$

s konečnou hodnotou $y_3(1{,}8\ \mathrm{s}) = 18{,}17\ \mathrm{m}$.

Raketa dosud nedopadla, proto na čtvrtém úseku pro $t \in \langle 0; t_4 - t_3 \rangle = \langle 0; ? \rangle$ probíhá volný pohyb v tíhovém poli:

$$a_{y4}(t) = -g = -10\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2},$$

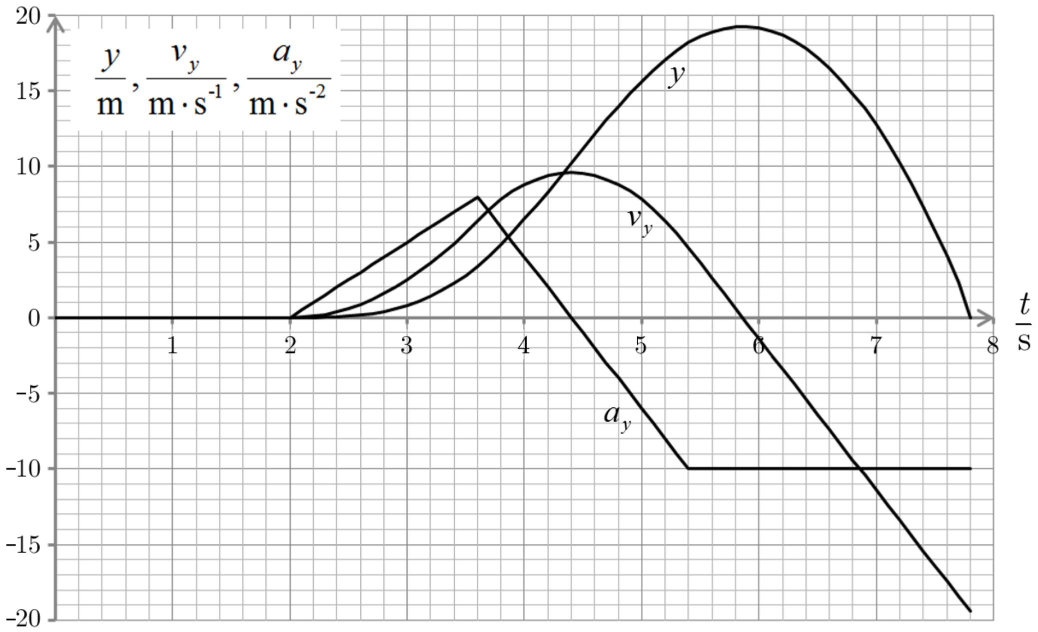
$$v_{y4}(t) = v_{y3}(1{,}8\ \mathrm{s}) - gt = (4{,}6 - 10t \cdot \mathrm{s})\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1},$$

$$y_4(t) = y_3(1{,}8\ \mathrm{s}) + v_{y3}(1{,}8\ \mathrm{s})\,t - \frac{1}{2}gt^2 = \left(18{,}17 + 4{,}6t \cdot \mathrm{s}^{-1} - 5t^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}\right) \mathrm{m}.$$

Z podmínky $y_4(t) = \left(5t^2 \cdot \mathrm{s}^{-2} - 4{,}6t \cdot \mathrm{s}^{-1} - 18{,}17\right) \mathrm{m} = 0$ určíme čas dopadu. Fyzikální význam má kladný kořen

$$t = \frac{4{,}6 \pm \sqrt{4{,}6^2 + 4 \cdot 5 \cdot 18{,}17}}{2 \cdot 5}\ \mathrm{s} = 2{,}4\ \mathrm{s},$$

Tedy okamžik dopadu je $t_4 = t_3 + t = 7{,}8\ \mathrm{s}$. **4 body**



Obr. R1 **3 body**

4.a) Pro kinetické energie jader platí

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot 3m_0 v_1^2 = \frac{3}{2} m_0 v_1^2,$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \cdot 4m_0v_2^2 = 2m_0v_2^2,$$
$$E_1 + E_2 = \Delta E. \tag{1}$$

Ze ZZH $3m_0v_1 = 4m_0v_2$ plyne

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{4}.$$

Dosazením do poměru kinetických energií dostaneme

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{2m_0v_2^2}{\frac{3}{2}m_0v_1^2} = \frac{4v_2^2}{3v_1^2} = \frac{3}{4}. \tag{2}$$

Z rovnic (1) a (2) plyne

$$E_1 = \frac{4}{7}\Delta E = 2{,}7\ \mathrm{MeV},$$
$$E_2 = \frac{3}{7}\Delta E = 2{,}1\ \mathrm{MeV}.$$

4 body

b) Z části a) plyne, že větší rychlost má jádro tritia. Pro jeho klasickou kinetickou energii platí

$$\frac{4}{7}\Delta E = \frac{3}{2}m_0v_1^2.$$

Z rovnice plyne

$$v_1 = \sqrt{\frac{8\Delta E}{21m_0}} \doteq 1{,}3 \cdot 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

2 body

Relativistická kinetická energie jádra je rozdílem jeho celkové a klidové energie

$$\frac{4}{7}\Delta E = \frac{3m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}c^2 - 3m_0c^2,$$

neboli

$$4\Delta E = 21m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} - 1 \right).$$

Vyjádřením rychlosti dostaneme

$$v_1 = c\sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{4\Delta E}{21m_0c^2} + 1\right)^2}} = 1{,}3 \cdot 10^7 \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

3 body

Výsledky s ohledem na požadovanou přesnost jsou stejné, liší se až u 4. platné číslice. Výsledná rychlost tvoří necelých 5 % rychlosti světla ve vakuu. **1 bod**

Poznámka: Skutečný poměr hmotností nuklidů tritia a helia

$$\frac{m\left({}^3_1\mathrm{H}\right)}{m\left({}^4_2\mathrm{He}\right)} = \frac{3{,}016\ 049m_\mathrm{u}}{4{,}002\,603m_\mathrm{u}} = 0{,}753\ 521 \doteq 0{,}75 = \frac{3}{4}$$

se liší od poměru jejich nukleonových čísel u třetí platné číslice, proto lze předpoklad o přímé úměrnosti hmotnosti na počtu nukleonů pro požadovanou přesnost použít.

5.a) K lomu světla dochází pouze na kuželové ploše s úhlem dopadu φ. Označíme-li úhel lomu β, pak platí

$$\sin\beta = n\sin\varphi,$$

a pro malé úhly

$$\beta \approx n\varphi.$$

Paprsek je tak odchýlen od původního směru o úhel

$$\varepsilon = \beta - \varphi = (n-1)\,\varphi.$$

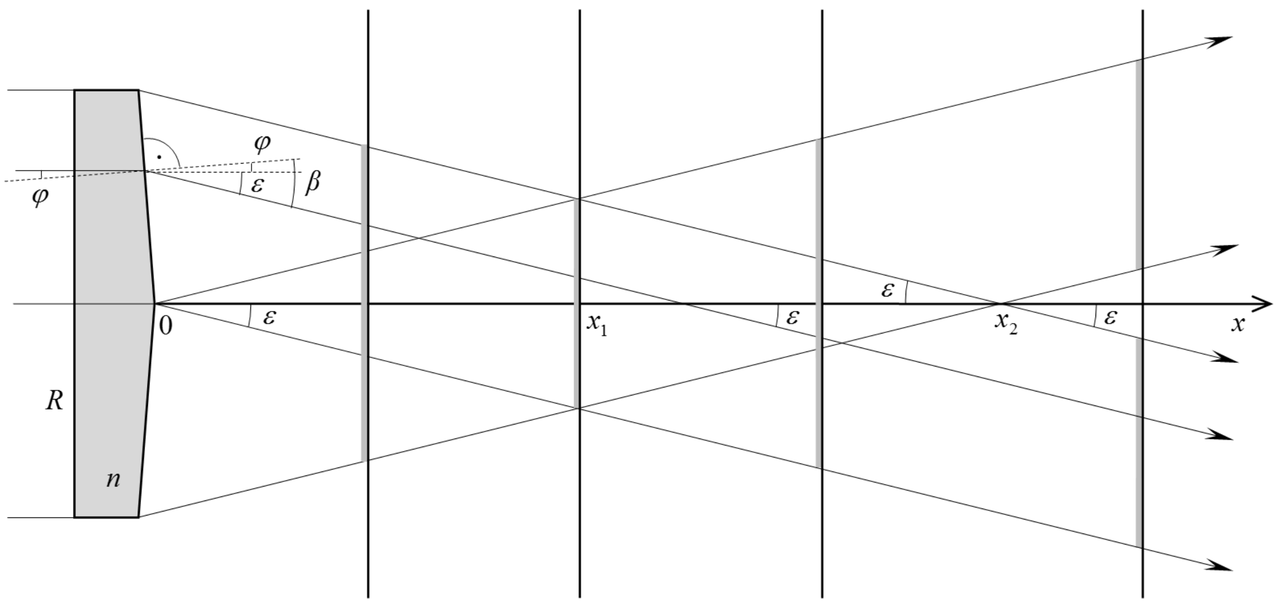
Označme x vzdálenost stínítka od vrcholu kuželové plochy. Z obrázku R2 plyne

$$x_2 = R\,\mathrm{cotg}\,\varepsilon,$$

$$x_1 = \frac{x_2}{2} = \frac{R}{2}\,\mathrm{cotg}\,\varepsilon.$$

Světelný obrazec má pro polohu stínítka $x \leq x_1$ tvar kruhu o poloměru

$$r_2 = (x_2 - x)\mathrm{tg}\,\varepsilon = (R\,\mathrm{cotg}\,\varepsilon - x)\mathrm{tg}\,\varepsilon = R - x\,\mathrm{tg}\,\varepsilon.$$



Obr. R2

Pro polohu stínítka $x_1 \leq x \leq x_2$ má světelný obrazec tvar kruhu o poloměru

$$r_2 = x\mathrm{tg}\,\varepsilon,$$

pro polohu stínítka $x > x_2$ má tvar mezikruží o vnějším poloměru

$$r_2 = x\,\mathrm{tg}\varepsilon$$

a o vnitřním poloměru

$$r_1 = (x - x_2)\,\mathrm{tg}\,\varepsilon = (x - R\,\mathrm{cotg}\,\varepsilon)\,\mathrm{tg}\,\varepsilon = x\,\mathrm{tg}\,\varepsilon - R.$$

Pro $x \leq x_1$ je obsah kruhu

$$S\,(x) = \pi r_2^2 = \pi[R - x\,\mathrm{tg}\,(n-1)\,\varphi]^2.$$

Pro $x_1 \leq x \leq x_2$ je obsah kruhu

$$S\,(x) = \pi r_2^2 = \pi x^2 \mathrm{tg}^2\,(n-1)\,\varphi.$$

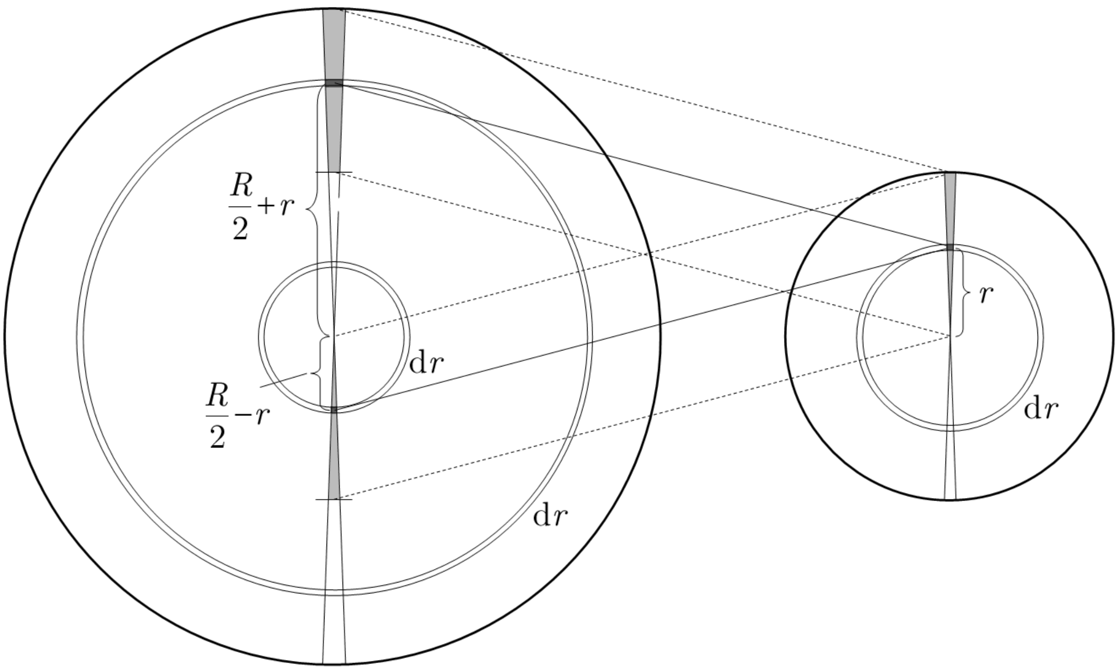
Pro $x > x_2$ je obsah mezikruží

$$S\,(x) = \pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \pi\left[x^2\mathrm{tg}^2\varepsilon - (x\,\mathrm{tg}\,\varepsilon - R)^2\right] =$$
$$= \pi\left[2Rx\mathrm{tg}\,\varepsilon - R^2\right] = \pi R\,[2x\,\mathrm{tg}\,(n-1)\,\varphi - R]\,.$$

5 bodů

b) Světelný tok vstupující do plochy podstavy válce o obsahu $\mathrm{d}S$ je roven světelnému toku dopadajícímu na odpovídající plochu o obsahu $\mathrm{d}S'$ stínítka: $\mathrm{d}\Phi = E_0\mathrm{d}S = E\mathrm{d}S'$, kde

$$E_0 = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}S} = \frac{\Phi}{S} = \frac{\Phi}{\pi R^2}.$$



Obr. R3

Stopa na stínítku má nejmenší rozměr v místě o souřadnici

$$x_1 = \frac{R}{2}\,\mathrm{cotg}\,\varepsilon.$$

Do každého místa světelného obrazce na stínítku dopadá světlo ze dvou směrů (obr. R3). Uvažujme na stínítku horní polovinu tenkého mezikruží s vnitřním poloměrem $r \in \left(0;\ \frac{R}{2}\right)$ a s elementární šířkou dr. Na ni dopadá světlo, které před lomem vychází z plochy horní poloviny mezikruží o poloměru $\dfrac{R}{2} + r$ a s elementární šířkou dr a světlo z plochy dolní poloviny mezikruží o poloměru $\dfrac{R}{2} - r$ a se stejnou elementární šířkou dr.

$$E\left(r\right) = E_0 \frac{\mathrm{d}S(sklo)}{\mathrm{d}S'\left(stínítko\right)} = E_0 \left(\frac{2\pi\left(\frac{R}{2} + r\right)\mathrm{d}r}{2\pi r \mathrm{d}r} + \frac{2\pi\left(\frac{R}{2} - r\right)\mathrm{d}r}{2\pi r \mathrm{d}r} \right) =$$

$$= E_0 \left(\frac{\frac{R}{2} + r}{r} + \frac{\frac{R}{2} - r}{r} \right) = E_0 \frac{R}{r}.$$

Pro $r = \dfrac{R}{2}$ (okraj světelné stopy) je $E = 2E_0$, pro $r \to 0$ je $E \to \infty$, to znamená, že okraj světelné stopy je ostrý (kontrastní) a směrem ke středu osvětlení roste a ve středu se blíží k nekonečnu (je to jakási obdoba ohniska u spojné čočky).

5 bodů

Poznámka: Výsledek je možné ověřit integrací osvětlení v celé ploše.

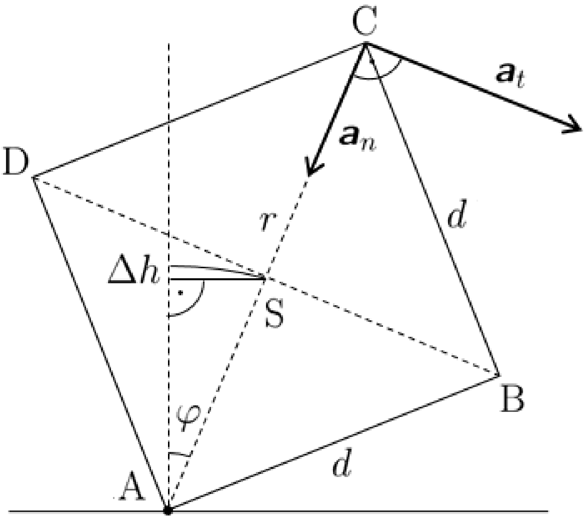
$$\Phi = \int\limits_{(S)} E\left(r\right) dS = \int\limits_{0}^{\frac{R}{2}} E_0 \frac{R}{r} \cdot 2\pi r \mathrm{d}r = 2\pi R E_0 \int\limits_{0}^{\frac{R}{2}} \mathrm{d}r = 2\pi R E_0 \left[r\right]_0^{\frac{R}{2}} = \pi R^2 E_0.$$

6. Energie kondenzátoru po překmitnutí obvodu je téměř rovna součtu energie kondenzátoru a cívky před rozepnutím spínače:

$$\frac{1}{2}CU_2^2 \approx \frac{1}{2}CU_1^2 + \frac{1}{2}LI^2, \quad L = \frac{C\left(U_2^2 - U_1^2\right)}{I^2}.$$

Indukčnost cívky 1200 závitů z rozkladného transformátoru s uzavřeným jádrem je přibližně 1,6 H, s rovným jádrem 0,2 H.

7. Pohyb krychle v prostoru lze redukovat na rovinný pohyb jejího průmětu (čtverce) v nákresně.



Obr. R4

a) Moment setrvačnosti krychle vzhledem k hraně je podle Steinerovy věty

$$J = \frac{1}{6}md^2 + m\left(\frac{\sqrt{2}}{2}d\right)^2 = \frac{2}{3}md^2.$$

Ze ZZME je úbytek potenciální energie roven přírůstku kinetické energie rotačního pohybu

$$mg \cdot \Delta h = \frac{1}{2}J\omega^2.$$

Po dosazení dostaneme

$$mg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}d - \frac{\sqrt{2}}{2}d\cos\varphi\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}md^2 \cdot \omega^2.$$

Z rovnice plyne

$$\omega = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}g\left(1-\cos\varphi\right)}{2d}}.$$ **2 body**

b) Označme r poloměr otáčení protilehlé hrany. Velikost normálového zrychlení hrany je

$$a_n = r\omega^2 = \sqrt{2}d \cdot \frac{3\sqrt{2}g\left(1-\cos\varphi\right)}{2d} = 3g\left(1-\cos\varphi\right).$$

Velikost tečného zrychlení protilehlé hrany je

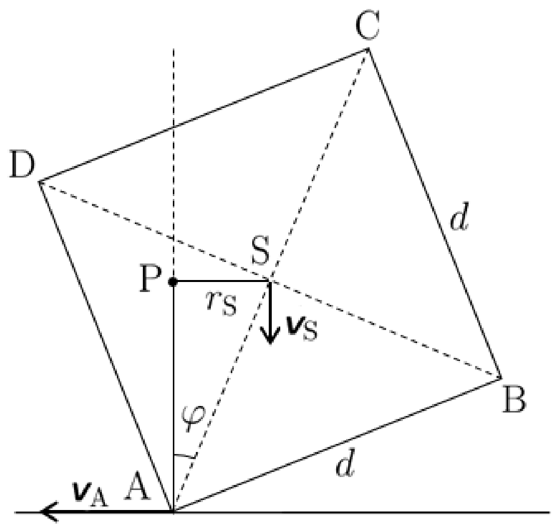
$$a_t = r\varepsilon = \sqrt{2}d \cdot \frac{M}{J} = \sqrt{2}d \cdot \frac{mg \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}d\sin\varphi}{\frac{2}{3}md^2} = \frac{3}{2}g\sin\varphi.$$

Maximální hodnoty dostaneme pro $\varphi = 45°$:

$$a_{n,\max} = \frac{3\left(2-\sqrt{2}\right)}{4} g = 0{,}879g,$$

$$a_{t,\max} = \frac{3\sqrt{2}}{4} g = 1{,}06g. \qquad \textbf{3 body}$$

c) Tentokrát se těžiště pohybuje po svislé přímce, neboť na krychli působí pouze svislá tíhová síla a svislá reakce podložky (třecí síla je nulová). Pohyb krychle lze rozložit na translační pohyb svisle dolů a rotační pohyb kolem vodorovné osy procházející středem S, přičemž dotyková hrana krychle klouže po podložce (v průmětu bod A klouže po přímce).



Obr. R5

Ze ZZME plyne

$$mg \cdot \Delta h = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2,$$

kde v_S je velikost rychlosti posuvného pohybu středu krychle. Pomocí směrů okamžitých rychlostí $\boldsymbol{v}_S$ bodu S a $\boldsymbol{v}_A$ bodu A určíme okamžitý bod otáčení (pól pohybu) P. Pak platí

$$v_S = r_S \omega = \frac{\sqrt{2}}{2} d \sin\varphi \cdot \omega,$$

Po dosazení do rovnice ZZME dostaneme

$$mg \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} d\,(1-\cos\varphi) = \frac{1}{2} m \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} d \sin\varphi \cdot \omega\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} m d^2 \cdot \omega^2,$$

po úpravě

$$\frac{\sqrt{2}}{2} g\,(1-\cos\varphi) = \frac{1}{4} d\omega^2 \sin^2\varphi + \frac{1}{12} d\omega^2.$$

Z rovnice plyne

$$\omega = \sqrt{\frac{6\sqrt{2}\,(1-\cos\varphi)\,g}{\left(3\sin^2\varphi + 1\right) d}}. \qquad \textbf{3 body}$$

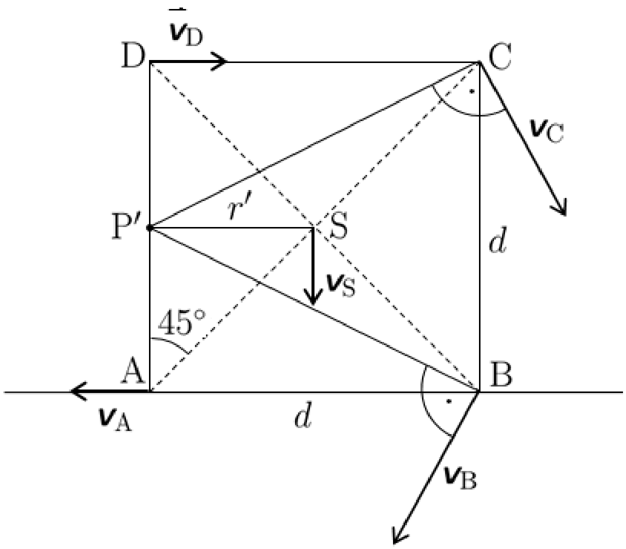
d) Bezprostředně před dopadem je úhlová rychlost otáčení maximální, dosazením $\varphi = 45^\circ$ dostaneme její maximální hodnotu

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{12\left(\sqrt{2}-1\right)g}{5d}}.$$

Pól pohybu P′ je tentokrát ve středu průmětu hrany AD, proto platí

$$v_{\mathrm{B}} = r'\omega_{\max} = \frac{\sqrt{5}}{2}d \cdot \sqrt{\frac{12\left(\sqrt{2}-1\right)g}{5d}} = \sqrt{3\left(\sqrt{2}-1\right)gd}.$$

2 body



Obr. R6