Řešení úloh krajského kola 64. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie A

Úlohy navrhli J. Thomas (1, 2, 3) a J. Jírů (4)

1. a) Označme ρ hustotu materiálu vzorku a ρ_v hustotu vody. Na vzduchu má vzorek tíhu

$$G = \rho\,(V - V_k)\,g,$$

ve vodě pak

$$G_1 = \rho\,(V - V_k)\,g - \rho_v\,(V - V_k)\,g = \frac{1}{2}G = \frac{1}{2}\rho\,(V - V_k)\,g \quad \Rightarrow \quad \rho = 2\rho_v.$$

Tíha tělesa s uzavřenými póry ve vodě

$$G_2 = \rho\,(V - V_k)\,g - \rho_v V g.$$

Podle zadání

$$G_2 = \frac{G}{3} \quad \Rightarrow \quad \rho\,(V - V_k) - \rho_v V = \frac{1}{3}\rho\,(V - V_k) \quad \Rightarrow \quad V_k = \frac{V}{4} \quad \Rightarrow \quad \vartheta = 25\ \%.$$

3 body

b) Protože rtuť látku nesmáčí, musí vnější síla překonávat sílu, způsobenou kapilárním tlakem

$$p\pi\frac{d^2}{4} = \sigma_{\mathrm{Hg}}\pi d,$$

proto začne rtuť plnit kapiláry o průměru d, až když tlak dosáhne hodnoty

$$p = \frac{4\sigma_{\mathrm{Hg}}}{d}.$$

Nejdříve se tedy budou zaplňovat póry o průměru $d_1 = \frac{4\sigma_{\mathrm{Hg}}}{p_0} = 1{,}94 \cdot 10^{-5}$ m, pak póry o průměru $d_2 = \frac{2\sigma_{\mathrm{Hg}}}{p_0} = 9{,}7 \cdot 10^{-6}$ m a nakonec póry o průměru $d_3 = \frac{4\sigma_{\mathrm{Hg}}}{3p_0} = 6{,}5 \cdot 10^{-6}$ m. **3 body**

Ve vzorku látky jsou tedy póry o třech různých průměrech. Pro jejich celkový počet platí $N = N_1 + N_2 + N_3$.

Z grafu vidíme, že do pórů o průměru d_1 pronikl objem rtuti

$$N_1\pi\frac{d_1^2}{4}l = 0{,}68V_{\max},$$

kde l je délka póru. Podobně

$$N_2\pi\frac{d_2^2}{4}l = 0{,}85V_{\max} - 0{,}68V_{\max} = 0{,}17V_{\max},$$

$$N_3\pi\frac{d_3^2}{4}l = V_{\max} - 0{,}85V_{\max} = 0{,}15V_{\max}.$$

Dělením rovnic a vzhledem k tomu, že $d_2 = \frac{1}{2}d_1$ a $d_3 = \frac{1}{3}d_1$, dostáváme

$$N_1 d_1^2 : N_2 d_2^2 : N_3 d_3^2 = N_1 : N_2\frac{1}{4} : N_3\frac{1}{9} = 0{,}68 : 0{,}17 : 0{,}15,$$

pak $N_1 : N_2 : N_3 = 0{,}68 : 0{,}68 : 1{,}35 \cong 1 : 1 : 2$.
Ve vzorku je tedy 50 % pórů o průměru d_3, 25 % o průměru d_1 a 25 % o průměru d_2. **4 body**

2. a) Označme f_1 ohniskovou vzdálenost čočky, a_1 obrazovou vzdálenost bodu A a b_1 obrazovou vzdálenost bodu B. Pro ohniskovou vzdálenost f_1 ploskovypuklé čočky s poloměrem křivosti r platí

$$\frac{1}{f_1} = (n_1 - 1)\frac{1}{r} \quad \left(f_1 = \frac{r}{n_1 - 1} = 60\ \text{cm}\right).$$

Pro každý z bodů A, B napíšeme zobrazovací rovnici, po úpravě

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{a_1} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{r}{n_1 - 2} = -60\ \text{cm},$$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{r+d} + \frac{1}{b_1} \quad \Rightarrow \quad b_1 = \frac{r\,(r+d)}{(n_1 - 1)\,(r+d) - r} = -78{,}5\ \text{cm}.$$

Zvětšení úsečky je

$$Z_1 = -\frac{b_1 - a_1}{d} = 4{,}6.$$

Obraz je zdánlivý (před čočkou) a zvětšený. **3 body**

b) Nyní označíme f_2 ohniskovou vzdálenost čočky, a_2 obrazovou vzdálenost bodu A a b_2 obrazovou vzdálenost bodu B.
Pro ohniskovou vzdálenost f_2 ploskovypuklé čočky s poloměrem křivosti r bez ohledu na znaménko indexu lomu platí stejný vztah (důkaz v dodatku).

$$\frac{1}{f_2} = (n_2 - 1)\frac{1}{r} \quad \left(f_2 = \frac{r}{n_2 - 1} = -12\ \text{cm}\right).$$

Nyní v zobrazovací rovnici pro tytéž body A, B zaměníme pouze indexy, po úpravě:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{a_2} \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{r}{n_2 - 2} = -8{,}57\ \text{cm},$$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{r+d} + \frac{1}{b_2} \quad \Rightarrow \quad b_2 = \frac{r\,(r+d)}{(n_2 - 1)\,(r+d) - r} = -8{,}87\ \text{cm}.$$

Zvětšení úsečky je

$$Z_2 = -\frac{b_2 - a_2}{d} = 0{,}075.$$

Obraz je zdánlivý (před čočkou) a zmenšený. **3 body**

c) Nyní označíme f ohniskovou vzdálenost čočky, a obrazovou vzdálenost bodu A a b obrazovou vzdálenost bodu B.
Při spojení čoček je výsledná optická mohutnost rovna součtu optických mohutností jednotlivých čoček:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = (n_1 - 1)\frac{1}{r} + (n_2 - 1)\frac{1}{r} = \frac{n_1 + n_2 - 2}{r}.$$

Pro $n_2 = -n_1$ dostaneme

$$\frac{1}{f} = -\frac{2}{r} \quad \left(f = -\frac{r}{2} = -15\ \text{cm}\right).$$

Indexy lomu stejné velikosti se vzájemně kompenzují, výsledná ohnisková vzdálenost závisí pouze na poloměru křivosti. Zobrazovací rovnice pro tytéž body A, B budou nyní bez indexů. Po úpravě

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{r} + \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{r}{3} = -10\ \text{cm},$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{r+d} + \frac{1}{b} \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{r\,(r+d)}{3r+2d} = -10{,}41\ \text{cm}.$$

Zvětšení úsečky je

$$Z = -\frac{b-a}{d} = 0{,}10.$$

Obraz je zdánlivý (před čočkou) a zmenšený. **4 body**

Alternativní řešení c): Body A, B zobrazíme první čočkou, jejich obrazy pak druhou čočkou. Obrazové vzdálenosti a_1, b_1 již známe z části a).

Obrazový prostor první čočky je předmětovým prostorem druhé čočky a naopak, proto pro druhou čočku jsou předmětové vzdálenosti $-a_1$, $-b_1$. Zobrazovací rovnice pro druhé zobrazení jsou

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{-a_1} + \frac{1}{a},$$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{-b_1} + \frac{1}{b}.$$

Po dosazení a po úpravě s uvážením $n_2 = -n_1$ nakonec dostaneme

$$\frac{n_2-1}{r} = -\frac{n_1-2}{r} + \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{r}{3},$$

$$\frac{n_2-1}{r} = -\frac{(n_1-1)\,(r+d)-r}{r\,(r+d)} + \frac{1}{b} \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{r\,(r+d)}{3r+2d}.$$

Dodatek pro část b): V obrázku je ploskovypuklá čočka obklopená vzduchem. Paprsek rovnoběžný s optickou osou se láme do obrazového ohniska, lom je znázorněn současně pro kladný i záporný index lomu.

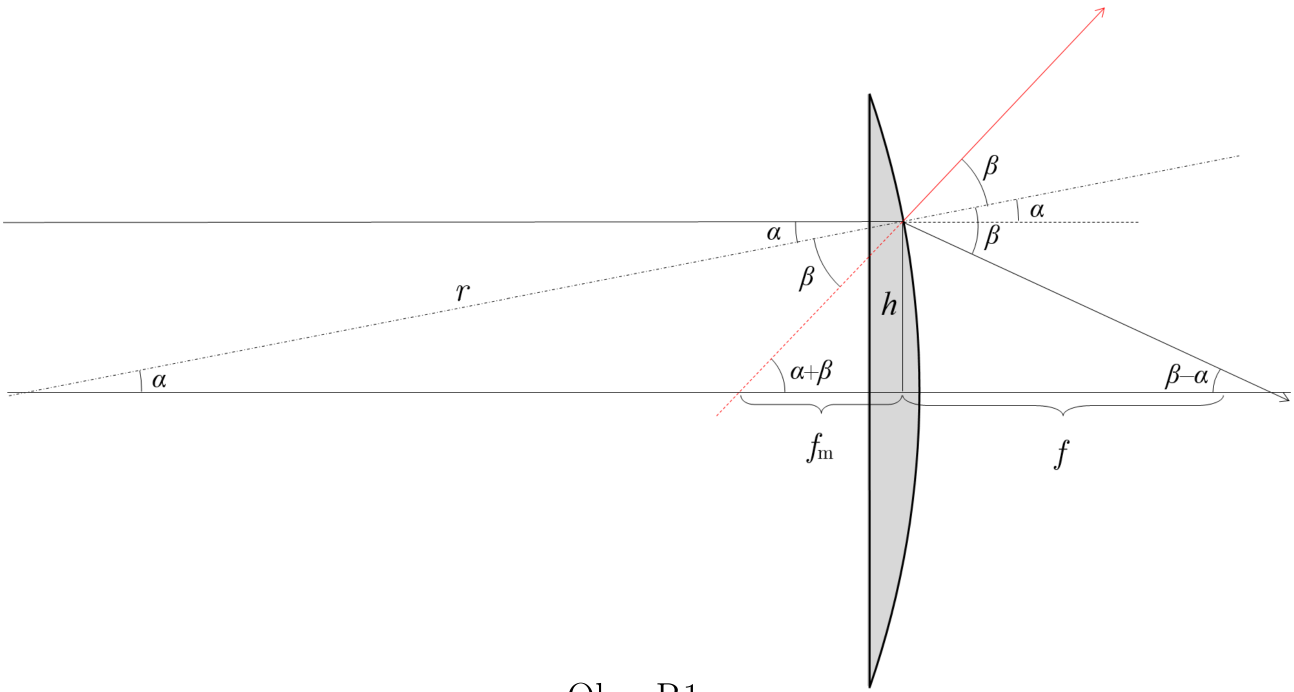
Určíme ohniskovou vzdálenost f materiálu a ohniskovou vzdálenost f_m metamateriálu čočky. Pro paraxiální paprsky platí

$$\cos\alpha \approx 1, \tag{1}$$

$$\frac{h}{r} \approx \sin\alpha. \tag{2}$$

V klasické látce

$$\frac{h}{f} \approx \sin\left(\beta - \alpha\right). \tag{3}$$



Obr. R1

V metamateriálu obrazové ohnisko leží v předmětovém prostoru, proto v souladu se znaménkovou konvencí je ohnisková vzdálenost záporná:

$$\frac{h}{f_\mathrm{m}} \approx -\sin(\alpha+\beta)\,. \tag{4}$$

Z rovnic (1), (2), (3) plyne

$$\frac{r}{f} \approx \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha}{\sin\alpha} \approx \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} - \cos\beta = n - 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{f} = (n-1)\,\frac{1}{r},$$

což je očekávaný výsledek. Z rovnic (1), (2), (4) plyne

$$\frac{r}{f_\mathrm{m}} \approx \frac{-\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} = \frac{-\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha} \approx -1 - \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = -1 - |n|\,.$$

Pro záporný index lomu odstraníme absolutní hodnotu:

$$\frac{r}{f_\mathrm{m}} \approx -1 - |n| = -1 + n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f_\mathrm{m}} = (n-1)\,\frac{1}{r},$$

neboli i *pro záporný index lomu platí stejný vztah:*

$$\frac{1}{f_\mathrm{m}} = (n-1)\,\frac{1}{r},$$

v němž jsme podle zvyklosti přibližnou rovnost nahradili rovností.

3. a) Na proton v mezeře působí elektrická síla

$$F = Q\frac{U}{d} = 4{,}8\cdot 10^{-12}\ \mathrm{N}. \qquad \textbf{1 bod}$$

Přírůstek kinetické energie je roven práci elektrického pole na vzdálenosti d:

$$\Delta E_k = Fd = QU = 9{,}6\cdot 10^{-14}\ \mathrm{J} = 0{,}60\ \mathrm{MeV}. \qquad \textbf{2 body}$$

b) Proton proletěl sedmi mezerami, jeho kinetická energie je rovna celkové práci elektrického pole

$$\frac{1}{2}m_p v_7^2 = 7 \cdot QU.$$

Z rovnice pro jeho rychlost plyne

$$v_7 = \sqrt{\frac{14QU}{m_p}} = 2{,}84 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

Uvnitř válce se proton pohybuje po dobu rovnou polovině periody. Délka válce 8 pak bude $s_8 = \dfrac{v_7}{2f} = 0{,}71$ m. **2 body**

c) Celková energie protonu na vstupu do válce 8 bude

$$E = \frac{m_p c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1{,}5 \cdot 10^{-10} \text{ J} = 940 \text{ MeV}.$$

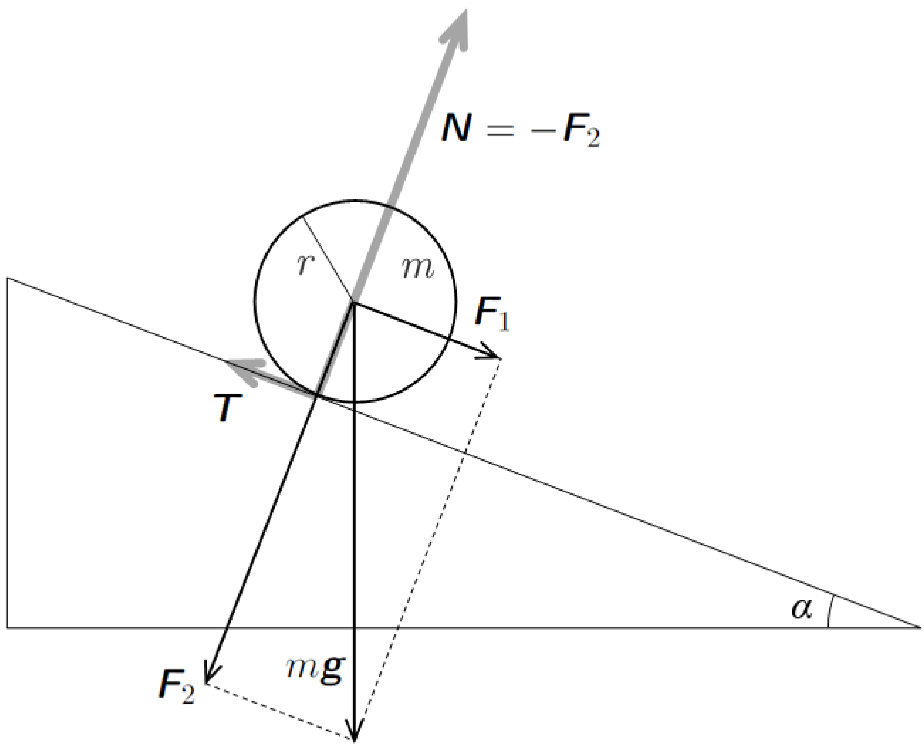
1 bod

Kinetická energie je rozdílem celkové a klidové energie protonu:

$$E_k = E - m_p c^2 = \frac{m_p c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_p c^2 = 6{,}77 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 4{,}2 \text{ MeV}.$$

Poznámka: K výsledku stejnému na dvě platné číslice lze dospět i přes přírůstek kinetické energie:

$$E_k = 7\Delta E_k = 7QU = 6{,}7 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 4{,}2 \text{ MeV}.$$ **2 body**



Obr. R2

4. a) Na kouli působí tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ se složkami $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ a reakce nakloněné roviny s normálovou složkou $\boldsymbol{N} = -\boldsymbol{F}_2$ a tečnou složkou $\boldsymbol{T}$ (obr. R2). Přitom platí

$$F_1 = mg\sin\alpha,$$
$$F_2 = mg\cos\alpha.$$

Napíšeme pohybové rovnice posuvného a rotačního pohybu:

$$F_1 - T = ma,$$
$$Tr = J\varepsilon.$$

Při neprokluzování platí vazbová podmínka

$$a = r\varepsilon.$$

Dosazením vztahů do pohybových rovnic a jejich úpravou dostaneme

$$mg\sin\alpha - T = ma,$$
$$Tr = \frac{2}{3}mr^2 \cdot \frac{a}{r} = \frac{2}{3}mar \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2}{3}ma.$$

Z rovnic plyne

$$a = \frac{3}{5}g\sin\alpha,$$
$$\varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{3g}{5r}\sin\alpha.$$

5 bodů

Alternativní řešení zrychlení a:
Označme h výšku, l délku nakloněné roviny a v dosaženou rychlost koule. Užijeme ZZME:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2.$$

Dosazením vazbové podmínky

$$\omega = \frac{v}{r}$$

a momentu setrvačnosti dostaneme

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}mr^2\cdot\frac{v^2}{r^2} = \frac{5}{6}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{6}{5}gh.$$

Koule se valí rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením

$$a = \frac{v^2}{2l} = \frac{\frac{6}{5}gh}{2l} = \frac{3g\cdot l\sin\alpha}{5l} = \frac{3}{5}g\sin\alpha.$$

b) Platí

$$T = \frac{2}{3}ma = \frac{2}{3}m\cdot\frac{3}{5}g\sin\alpha = \frac{2}{5}mg\sin\alpha,$$

$$F_\mathrm{t} = fmg\cos\alpha.$$

Z podmínky $F_\mathrm{t} \geq T$ dostaneme

$$f \geq \frac{2}{5} \operatorname{tg} \alpha.$$

c) Při prokluzování již není splněna vazbová podmínka, tečná složka je určena přímo třecí silou:

$$T = F_\mathrm{t} = fmg \cos \alpha.$$

Dosazením do pohybových rovnic

$$F_1 - T = ma',$$
$$Tr = J\varepsilon'$$

dostaneme

$$mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha = ma' \quad \Rightarrow \quad a' = g \left(\sin \alpha - f \cos \alpha \right),$$
$$fmg \cos \alpha \cdot r = \frac{2}{3} mr^2 \cdot \varepsilon' \quad \Rightarrow \quad \varepsilon' = \frac{3fg}{2r} \cos \alpha.$$

3 body

Poznámka:

Dosazením hraniční podmínky $f = \dfrac{2}{5} \operatorname{tg} \alpha$ přejdou spojitě vztahy c) na vztahy a):

$$a' = g \left(\sin \alpha - f \cos \alpha \right) = g \left(\sin \alpha - \frac{2}{5} \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha \right) = \frac{3}{5} g \sin \alpha = a,$$
$$\varepsilon' = \frac{3fg}{2r} \cos \alpha = \frac{3g}{2r} \cos \alpha \cdot \frac{2}{5} \operatorname{tg} \alpha = \frac{3g}{5r} \sin \alpha = \varepsilon.$$