Řešení úloh celostátního kola 64. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie A

Úlohy navrhli: J. Thomas (1, 2, 3) a J. Jírů (4)

1. a) Podle zákona zachování energie platí $Q_\mathrm{v} = Q_\mathrm{m} + W$. Ze vztahů pro účinnost Carnotova cyklu

$$\eta = \frac{W}{Q_\mathrm{v}} = \frac{Q_\mathrm{v} - Q_\mathrm{m}}{Q_\mathrm{v}} = \frac{T_\mathrm{v} - T_\mathrm{m}}{T_\mathrm{v}},$$

$$1 - \frac{Q_\mathrm{m}}{Q_\mathrm{v}} = 1 - \frac{T_\mathrm{m}}{T_\mathrm{v}},$$

$$Q_\mathrm{v} = \frac{T_\mathrm{v}}{T_\mathrm{m}} Q_\mathrm{m}$$

úpravami postupně dostaneme

$$W = Q_\mathrm{v} - Q_\mathrm{m} = \frac{T_\mathrm{v}}{T_\mathrm{m}} Q_\mathrm{m} - Q_\mathrm{m} = \left(\frac{T_\mathrm{v}}{T_\mathrm{m}} - 1\right) Q_\mathrm{m} = \frac{T_\mathrm{v} - T_\mathrm{m}}{T_\mathrm{m}} Q_\mathrm{m} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_\mathrm{m} = W \frac{T_\mathrm{m}}{T_\mathrm{v} - T_\mathrm{m}} = P \Delta t \frac{T_\mathrm{m}}{T_\mathrm{v} - T_\mathrm{m}}.$$

4 body

Alternativní řešení s použitím chladicího faktoru K:

$$K = \frac{Q_\mathrm{m}}{W} = \frac{Q_\mathrm{m}}{Q_\mathrm{v} - Q_\mathrm{m}} = \frac{T_\mathrm{m}}{T_\mathrm{v} - T_\mathrm{m}} \quad \Rightarrow \quad Q_\mathrm{m} = W \frac{T_\mathrm{m}}{T_\mathrm{v} - T_\mathrm{m}} = P \Delta t \frac{T_\mathrm{m}}{T_\mathrm{v} - T_\mathrm{m}}.$$

b) V rovnováze musí klimatizační zařízení odebírat z místnosti stejné množství tepla, kolik ho do místnosti vniká z okolí. Platí proto

$$k \Delta T \Delta t = P \Delta t \frac{T_\mathrm{m}}{T_\mathrm{v} - T_\mathrm{m}} = P \Delta t \frac{T_\mathrm{m}}{\Delta T} = P \Delta t \frac{T_\mathrm{v} - \Delta T}{\Delta T}.$$

Pro rozdíl teplot ΔT dostáváme kvadratickou rovnici

$$k (\Delta T)^2 + P \Delta T - P T_\mathrm{v} = 0, \tag{1}$$

jejímž řešením vychází

$$\Delta T = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 + 4kPT_\mathrm{v}}}{2k}.$$

Fyzikální význam má pouze kladný kořen

$$\Delta T = \frac{P}{2k} \left(\sqrt{1 + \frac{4kT_v}{P}} - 1 \right).$$

Pro teplotu místnosti dostaneme

$$T_m = T_\mathrm{v} - \Delta T = T_\mathrm{v} - \frac{P}{2k} \left(\sqrt{1 + \frac{4kT_\mathrm{v}}{P}} - 1 \right).$$

5 bodů

c) Z rovnice (1)

$$P = \frac{k(\Delta T)^2}{T_\mathrm{v} - \Delta T} = \frac{k(\Delta T)^2}{T_\mathrm{m}} = 130 \text{ W}.$$

1 bod

2. a) Hledané poměry jsou

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{x}{1-x}; \quad \frac{r_1}{r_2} = \sqrt[3]{\frac{V_1}{V_2}} = \sqrt[3]{\frac{x}{1-x}}.$$

2 body

b) Podle zákona zachování hybnosti platí

$$xMv_1 = (1-x)Mv_2. \tag{1}$$

Podle zákona zachování energie se potenciální energie vzájemného silového působení nabitých kuliček umístěných vedle sebe, přemění na jejich kinetickou energii ve velké vzdálenosti poté, co se od sebe rozletí.

$$\frac{kx(1-x)Q^2}{R} = \frac{xMv_1^2}{2} + \frac{(1-x)Mv_2^2}{2}. \tag{2}$$

2 body

Abychom vyjádřili kinetickou energii první kuličky, musíme najít rychlost v_1. Vztah pro kinetickou energii druhé kuličky upravíme

$$\frac{(1-x)Mv_2^2}{2} = \frac{[(1-x)Mv_2]^2}{2(1-x)M}$$

a po dosazení z rovnice (1)

$$\frac{[(1-x)Mv_2]^2}{2(1-x)M} = \frac{(Mxv_1)^2}{2(1-x)M}.$$

Upravíme rovnici (2)

$$\frac{kx(1-x)Q^2}{R} = \frac{xMv_1^2}{2} + \frac{(Mxv_1)^2}{2(1-x)M}$$

a vyjádříme v_1^2

$$v_1^2 = \frac{2k(1-x)^2Q^2}{RM}.$$

Kinetická energie první kuličky pak bude

$$E_{k1} = \frac{xMv_1^2}{2} = \frac{xM}{2} \cdot \frac{2k(1-x)^2Q^2}{RM} = \frac{kx(1-x)^2Q^2}{R}.$$

2 body

c) Tento výraz bude maximální, když bude mít maximum funkce

$$f(x) = x(1-x)^2 = x - 2x^2 + x^3.$$

Derivace této funkce se rovná nule

$$f'(x) = 1 - 4x + 3x^2 = 0$$

pro $x = \frac{2\pm\sqrt{1}}{3}$, fyzikální řešení tedy je $x = \frac{1}{3}$. Protože druhá derivace funkce $f''(x) = -4 + 6x \quad \Rightarrow \quad f''(\frac{1}{3}) = -2 < 0$, jde skutečně o maximum. **2 body**

Poměry hmotností, nábojů a poloměrů tedy budou

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{2}; \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Maximální hodnota kinetické energie bude

$$E_{k1} = \frac{4kQ^2}{27R}.$$

2 body

Alternativní postup při řešení části b): Podle zákona zachování hybnosti platí

$$xMv_1 = (1-x)\,Mv_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{x}{1-x}v_1.$$

Podle zákona zachování energie se potenciální energie vzájemného silového působení nabitých kuliček umístěných vedle sebe přemění na jejich kinetickou energii ve velké vzdálenosti poté, co se od sebe rozletí:

$$\frac{kx(1-x)Q^2}{R} = E_{k1} + E_{k2}. \tag{1}$$

Pro kinetické energie platí

$$E_{k1} = \frac{xMv_1^2}{2},$$

$$E_{k2} = \frac{(1-x)\,Mv_2^2}{2} = \frac{(1-x)\,M}{2} \cdot \frac{x^2}{(1-x)^2}v_1^2 = \frac{xMv_1^2}{2} \cdot \frac{x}{1-x} = \frac{x}{1-x}E_{k1}.$$

Celková kinetická energie pak je

$$E_{k1} + E_{k2} = E_{k1} + \frac{x}{1-x}E_{k1} = \frac{1}{1-x}E_{k1}.$$

Dosazením do (1) dostaneme

$$\frac{kx(1-x)Q^2}{R} = \frac{1}{1-x}E_{k1} \quad \Rightarrow \quad E_{k1} = \frac{kx(1-x)^2Q^2}{R}.$$

3. a) Podle de Broglieho vztahu je vlnová délka neutronu

$$\lambda = \frac{h}{m_n v} = 1{,}47 \cdot 10^{-10}\ \text{m}.$$

Pro ohybový úhel prvního maxima na dvojštěrbině platí: $\sin\,\alpha = \dfrac{\lambda}{d}$ a $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{l}$. Protože jde o malé úhly, kde $\sin\alpha \cong \operatorname{tg}\alpha$, můžeme napsat

$$y \cong l\frac{\lambda}{d} = 5{,}8\ \mu\text{m} < 10\ \mu\text{m}$$

a to je méně, než je rozlišovací schopnost měřicí aparatury. **3 body**

b) Po jedné srážce zůstane neutronu 70 % jeho energie, po n srážkách to bude

$$E_{k,n} = 0{,}7^n E_{k,0}.$$

Pro nejmenší počet srážek

$$\frac{1}{2}m_n\left(0{,}8\ \frac{\text{km}}{\text{s}}\right)^2 = 0,7^n\frac{1}{2}m_n\left(2{,}7\ \frac{\text{km}}{\text{s}}\right)^2,$$

odtud

$$0{,}7^n = \left(\frac{0{,}8}{2{,}7}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln\left(\frac{0{,}8}{2{,}7}\right)^2}{\ln 0{,}7} = 6{,}82.$$

Počet srážek tedy musí být nejméně 7.

Vzdálenost mezi maximy 0. a 1. řádu je stejná jako vzdálenost mezi dvěma sousedními maximy:

$$y_1 = \frac{l}{d}\lambda = \frac{l}{d}\frac{h}{m_n v} = 19{,}7\ \mu\mathrm{m} > 10\ \mu\mathrm{m},$$

takže je detektorem měřitelná. **4 body**

c) Vzdálenost mezi maximy třetího řádu odpovídá vzdálenosti $y_3 = 220\ \mu\mathrm{m}$ mezi maximem 0. a 3. řádu. Z podmínky pro interferenci na dvojštěrbině

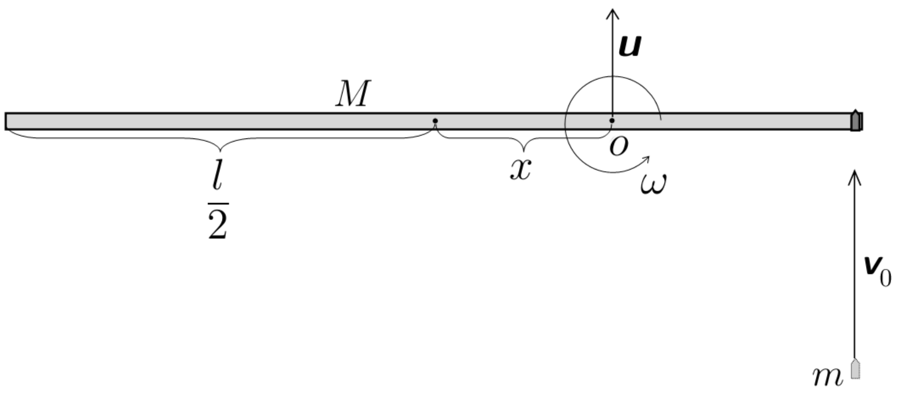
$$y_3 = k\frac{l}{d}\lambda_3 = k\frac{l}{d}\frac{h}{m_n v_3}$$

vyjádříme

$$v_3 = \frac{klh}{y_3 d m_n} = 0{,}21\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.$$

3 body

4. a) Zásahem se těžiště soustavy tyče a střely uvede do posuvného pohybu rychlostí $\boldsymbol{u}$ a současně se soustava začne otáčet s úhlovou rychlostí ω kolem svého těžiště.



Obr. R1

Určíme polohu těžiště soustavy po zásahu. Označíme-li x vzdálenost těžiště soustavy od středu tyče, pak platí

$$Mx = \left(\frac{l}{2} - x\right)m \Rightarrow x = \frac{m}{2(M+m)}l.$$ **1 bod**

Dále určíme moment setrvačnosti soustavy tyče a střely vzhledem ke svislé ose procházející těžištěm soustavy. Moment setrvačnosti střely vzhledem k uvedené ose je

$$J_1 = m\left(\frac{l}{2} - x\right)^2 = m\left[\frac{l}{2} - \frac{m}{2(M+m)}l\right]^2 = \frac{M^2 m}{4(M+m)^2}l^2.$$

Moment setrvačnosti tyče vzhledem k téže ose je

$$J_2 = \frac{1}{12}Ml^2 + Mx^2 = \frac{1}{12}Ml^2 + \frac{Mm^2}{4(M+m)^2}l^2.$$

Celkový moment setrvačnosti soustavy je

$$J = J_2 + J_1 = \frac{1}{12}Ml^2 + \frac{Mm^2}{4(M+m)^2}l^2 + \frac{M^2m}{4(M+m)^2}l^2 =$$

$$= \frac{M^2 + 5Mm + 4m^2}{12(M+m)^2}Ml^2 = \frac{(M+4m)\,(M+m)}{12(M+m)^2}Ml^2 = \frac{M+4m}{12\,(M+m)}Ml^2.$$

2 body

Úhlovou rychlost otáčení soustavy dostaneme užitím zákona zachování momentu hybnosti. Moment hybnosti střely vzhledem k ose otáčení procházející těžištěm soustavy před rázem je

$$L_1 = mv_0\left(\frac{l}{2} - x\right) = mv_0\left[\frac{l}{2} - \frac{m}{2\,(M+m)}l\right] = \frac{Mm}{2\,(M+m)}v_0 l.$$

Moment hybnosti soustavy vzhledem k ose otáčení procházející těžištěm soustavy po rázu je

$$L_2 = J\omega = \frac{M+4m}{12\,(M+m)}Ml^2\omega.$$

Ze zákona zachování momentu hybnosti během rázu z rovnosti $L_1 = L_2$ dostaneme

$$\frac{Mm}{2\,(M+m)}v_0 l = \frac{M+4m}{12\,(M+m)}Ml^2\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{6m}{M+4m}\frac{v_0}{l}.$$ **2 body**

b) Velikost u rychlosti posuvného pohybu těžiště soustavy dostaneme ze zákona zachování hybnosti

$$mv_0 = (M+m)\,u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{m}{M+m}v_0.$$

Kinetická energie před nárazem je $E_\mathrm{k} = \dfrac{mv_0^2}{2}$, kinetická energie po nárazu

$$E'_\mathrm{k} = \frac{(M+m)\,u^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

Dosazením a úpravou dostaneme

$$E'_\mathrm{k} = \frac{M+m}{2}\cdot\left(\frac{m}{M+m}v_0\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{M+4m}{12\,(M+m)}Ml^2\cdot\left(\frac{6m}{M+4m}\frac{v_0}{l}\right)^2 =$$

$$= \frac{m^2}{2\,(M+m)}v_0^2 + \frac{3Mm^2}{2\,(M+m)\,(M+4m)}v_0^2 =$$

$$= \frac{(M+4m) + 3M}{2\,(M+m)\,(M+4m)}m^2v_0^2 = \frac{2m^2}{M+4m}v_0^2.$$

Hledaný poměr je

$$\frac{\Delta U}{E_\mathrm{k}} = \frac{E_\mathrm{k} - E'_\mathrm{k}}{E_\mathrm{k}} = 1 - \frac{E'_\mathrm{k}}{E_\mathrm{k}} = 1 - \frac{\dfrac{2m^2}{M+4m}v_0^2}{\dfrac{m}{2}v_0^2} = 1 - \frac{4m}{M+4m} = \frac{M}{M+4m}.$$

2 body

c) Pro rotační pohyb soustavy označme u_1 obvodovou rychlost konce tyče se střelou a u_2 obvodovou rychlost opačného konce tyče. Hledáme podmínku

1. $u_1 > u$ pro konec tyče se střelou po otočení o $180°$,
2. $u_2 > u$ pro opačný konec bezprostředně po nárazu střely.

1. Dosazením postupně dostaneme

$$\left(\frac{l}{2} - x\right)\omega > \frac{m}{M+m}v_0,$$
$$\left[\frac{l}{2} - \frac{m}{2(M+m)}l\right]\frac{6m}{M+4m}\frac{v_0}{l} > \frac{m}{M+m}v_0,$$
$$\frac{M}{2(M+m)} \cdot \frac{6m}{M+4m} > \frac{m}{M+m},$$
$$M > 2m.$$

Za podmínky $M > 2m$ se zasažený konec tyče v okamžiku po otočení soustavy o $180°$ pohybuje v opačném směru, než letí střela.

2. Dosazením postupně dostaneme

$$\left(\frac{l}{2} + x\right)\omega > \frac{m}{M+m}v_0,$$
$$\left[\frac{l}{2} + \frac{m}{2(M+m)}l\right]\frac{6m}{M+4m}\frac{v_0}{l} > \frac{m}{M+m}v_0,$$
$$\frac{M+2m}{2(M+m)} \cdot \frac{6m}{M+4m} > \frac{m}{M+m},$$
$$M > -m.$$

Nerovnost je splněna pro libovolnou dvojici hmotností M a m, to znamená, že bezprostředně po zásahu se vždy nezasažený konec tyče uvede do pohybu v opačném směru, než letí střela. **3 body**