Řešení úloh 1. kola 64. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Autoři úloh: J. Thomas (1, 2, 5, 7), J. Tkadlec (3), J. Jírů, V. Vícha (4) a I. Čáp (6)

1. a) Při zrychleném pohybu trubice ve směru osy *x*, tj. doprava, působí v soustavě spojené s trubicí na kapalinu ve vodorovné části trubice setrvačná síla směrem doleva, hladina se tedy zvýší v levém sloupci.

Přitom

$$\rho l S a = F_1 - F_2 = [p_a + (h+\Delta h)\rho g S] - [p_a + (h-\Delta h)\rho g S] = 2\Delta h \rho g S.$$

Vyjádříme $\Delta h = \dfrac{l}{2g}a$.

Tento vztah ale platí pouze když $\Delta h \leq h$, tedy pro hodnoty zrychlení $a \leq 2g\frac{h}{l}$.

2 body

Při větším zrychlení bude pravá svislá část trubice prázdná. V levé části trubice bude kapalina do výšky $h+\Delta h$ a ve vodorovné trubici bude kapalina tvořit válec délky

$$l - (\Delta h - h) = l + h - \Delta h.$$

Z rovnosti setrvačné a tlakové síly $(l+h-\Delta h)S\rho a = (h+\Delta h)S\rho g$ plyne

$$\Delta h = \frac{(l+h)a - hg}{a+g}.$$

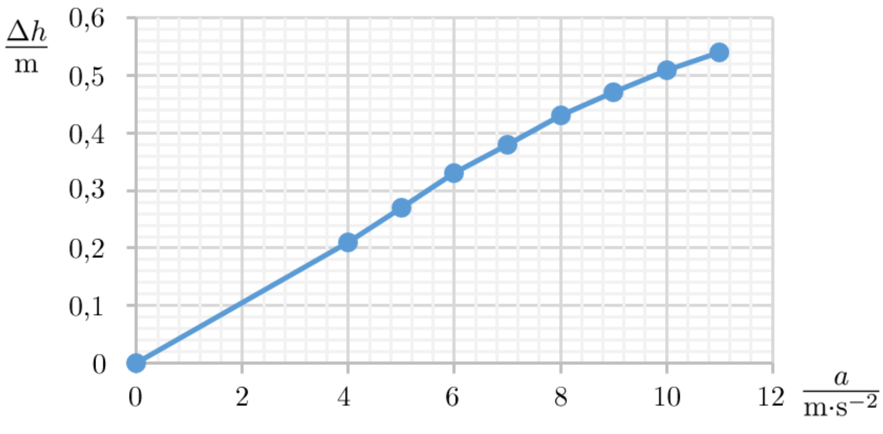
2 body

b) Nejprve vypočítáme hraniční hodnotu $2g\frac{h}{l}$, která vychází 3,924 m · s^{-2}. Je zřejmé, že pro zrychlení z intervalu $\langle 0; 3{,}924\rangle$ m · s^{-2} půjde o lineární funkci a pro zrychlení z intervalu $\langle 3{,}924;\ 11\rangle$ m · s^{-2} o lineární lomenou funkci.

Tabulka závislosti Δh na zrychlení a:

$\frac{a}{\mathrm{m\cdot s^{-2}}}$	0	3,924	4	5	6	7	8	9	10	11
$\frac{\Delta h}{\mathrm{m}}$	0	0,20	0,21	0,27	0,33	0,38	0,43	0,47	0,51	0,54

Graf:



Obr. R1

2 body

c) Při pohybu trubky doprava bude tlak v místě (1) roven součtu hydrostatického tlaku kapaliny a tlaku atmosférického

$$p_1 = p_a + h\rho g$$

V bodě (2) bude tento tlak vyšší o tlak způsobený setrvačnou silou

$$p_2 = p_a + h\rho g + l\rho a.$$

2 body

d) Bude-li se trubice pohybovat se zrychlením a doleva, bude v bodě (2) působit tlak hydrostatický a atmosférický, zmenšený o tlak vyvolaný setrvačnou silou

$$p = p_a + h\rho g - l\rho a.$$

Kapalina se přestane dotýkat uzavřeného konce trubice, bude-li zrychlení tělesa větší než

$$a_1 = \frac{p_a + h\rho g}{l\rho}.$$

Pro vodu by hodnota tohoto zrychlení byla $a_1 \cong 10g$. **2 body**

2.a) Hranolek se dá do pohybu, když velikost síly pružnosti bude větší, než síla tření; v mezním případě $fmg = k\,(l_1 - l_0)$, odtud

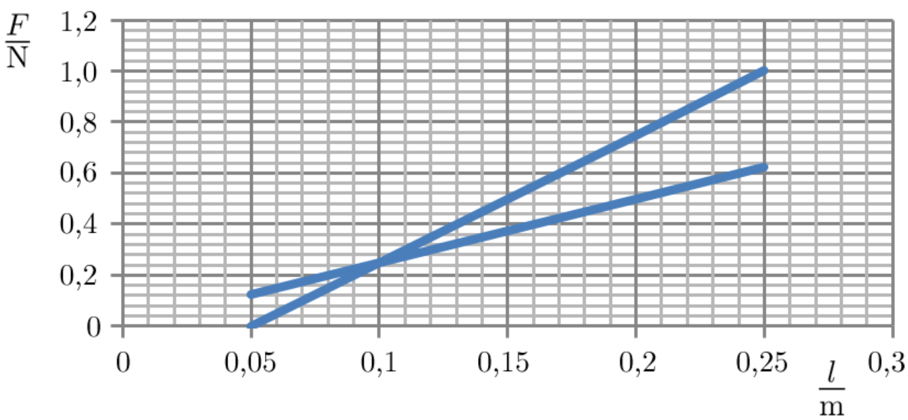
$$f = \frac{k\,(l_1 - l_0)}{mg} = 0{,}10.$$

2 body

b) Pro setrvačnou odstředivou sílu platí: $F_s = m\omega^2 l$, pro sílu pružnosti $F_p = k\,(l - l_0)$. Hodnoty zapíšeme do tabulky (k sestrojení grafu stačí vždy dva body):

$\frac{l}{\mathrm{m}}$	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25
$\frac{F_s}{\mathrm{N}}$	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625
$\frac{F_p}{\mathrm{N}}$	0	0,25	0,5	0,75	1,00

Sestrojíme graf:



Obr. R2

Z tabulky a grafu vidíme, že při vzdálenosti hranolku od osy 0,1 m jsou setrvačná síla a síla pružnosti v rovnováze. Při menších vzdálenostech převládá síla setrvačná, při větších vzdálenostech síla pružnosti. **2 body**

c) Bude-li setrvačná odstředivá síla větší než součet síly pružnosti a síly tření, bude se hranolek pohybovat od osy otáčení. Nejblíže osy bude hranolek v klidu ve vzdálenosti l_2, když bude velikost síly pružnosti právě rovna součtu velikostí setrvačné síly a síly tření

$$m\omega_1^2 l_2 = k\,(l_2 - l_0) + fmg \quad \Rightarrow \quad l_2 = \frac{kl_0 - fmg}{k - m\omega_1^2} = \frac{k\,(2l_0 - l_1)}{k - m\omega_1^2} = 0{,}06\ \text{m},$$

nejdále od osy bude hranolek v klidu ve vzdálenosti l_3, ve které je velikost síly pružnosti rovna součtu velikostí síly setrvačné a síly tření; ve větší vzdálenosti se bude pohybovat směrem k ose otáčení

$$m\omega_1^2 l_3 + fmg = k\,(l_3 - l_0) \quad \Rightarrow \quad l_3 = \frac{kl_0 + fmg}{k - m\omega_1^2} = \frac{kl_1}{k - m\omega_1^2} = 0{,}14\ \text{m}.$$

2 body

d) Aby se hranolek dostal až na okraj desky, musí být úhlová frekvence

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k\,(R - l_0)}{mR}} = 6{,}3\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

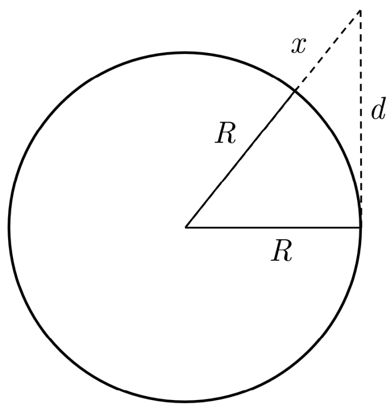
2 body

e) V soustavě spojené se Zemí se hranolek bude pohybovat ve svislé rovině, dotýkající se desky v bodě, kde hranolek opouští desku. V této rovině se hranolek pohybuje vodorovným vrhem z výšky H počáteční rychlostí $v_0 = R\omega_2$ a dopadne do vzdálenosti

$$d = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}} = R\omega_2\sqrt{\frac{2H}{g}} = R\sqrt{\frac{2Hk\,(R - l_0)}{mRg}} = 0{,}64\ \text{m}.$$

Pro vzdálenost x od okraje desky (obr. R3) pak platí

$$x = \sqrt{R^2 + d^2} - R = R\left(\sqrt{1 + \frac{2Hk\,(R - l_0)}{mgR}} - 1\right) = 0{,}44\ \text{m}.$$



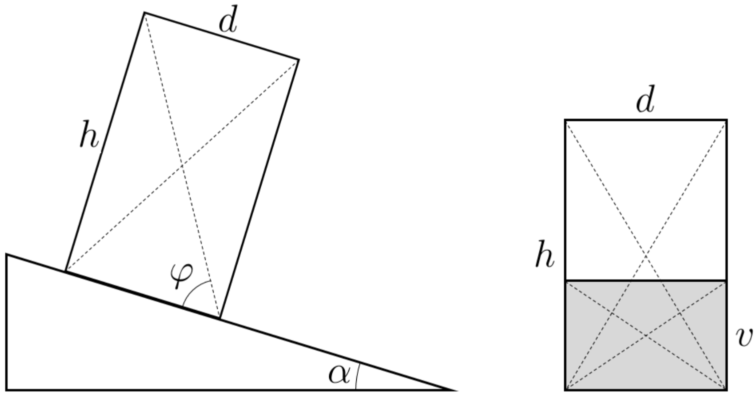
Obr. R3

2 body

3.a) Těžiště prázdné nádoby s víkem leží na její ose ve výšce $\frac{h}{2}$ nad dnem nádoby. Podmínkou stability (obr. R4) je, aby $\alpha + \varphi \leq 90°$. V krajní pozici rovnováhy pak platí

$$\alpha_0 = 90° - \varphi = 90° - \operatorname{arctg}\frac{h}{d} = \operatorname{arctg}\frac{d}{h} = 14°.$$

Podložku lze naklonit nejvýše o úhel 14°.



Obr. R4

2 body

b) Označme m_p hmotnost písku v nádobě. Pro výšku v_1 hladiny písku určíme výšku těžiště soustavy nad dnem:

$$y_{\mathrm{T}1} = \frac{m\frac{h}{2} + m_\mathrm{p}\frac{v_1}{2}}{m + m_\mathrm{p}} = \frac{m\frac{h}{2} + M\frac{v_1}{h} \cdot \frac{v_1}{2}}{m + M\frac{v_1}{h}} = \frac{mh^2 + Mv_1^2}{2\,(mh + Mv_1)} = 14\ \text{cm}.$$

Podmínka stability bude stejná jako v části a)

$$\alpha_1 = 90° - \varphi = 90° - \operatorname{arctg}\frac{2y_\mathrm{T}}{d} = \operatorname{arctg}\frac{d}{2y_\mathrm{T}} = \operatorname{arctg}\frac{d\,(mh + Mv_1)}{mh^2 + Mv_1^2} = 19°.$$

3 body

c) Hledáme výšku v_max, při které bude těžiště celé nádoby s pískem nejníže, tedy minimum funkce $y_\mathrm{T} = y_\mathrm{T}\,(v)$. Začneme-li sypat písek do prázdné nádoby, hladina písku bude stoupat a těžiště soustavy klesat. Po jisté době se těžiště soustavy ocitne v hladině písku. Další písek pak již přidáváme nad těžiště soustavy, čímž těžiště začíná stoupat. Z úvahy plyne, že těžiště soustavy je nejníže, je-li ve stejné výšce jako hladina písku. Proto platí

$$v = y_\mathrm{T} = \frac{mh^2 + Mv^2}{2\,(mh + Mv)}.$$

Úpravou dostaneme kvadratickou rovnici $Mv^2 + 2mhv - mh^2 = 0$ s kořeny

$$v = \frac{-2mh \pm \sqrt{4m^2h^2 + 4Mmh^2}}{2M} = \frac{-m \pm \sqrt{m\,(m + M)}}{M}h.$$

Fyzikální smysl má kladný kořen

$$v_\mathrm{max} = \frac{-m + \sqrt{m\,(m + M)}}{M}h = 0{,}17h = 6{,}9\ \text{cm}.$$

3 body

Této výšce odpovídá úhel

$$\alpha_{\max} = \mathrm{arctg}\frac{d}{2v_{\max}} = \mathrm{arctg}\frac{Md}{2\left(-m+\sqrt{m\left(m+M\right)}\right)h},$$

případně

$$\alpha_{\max} = \mathrm{arctg}\frac{M}{2m\left(\sqrt{1+\dfrac{M}{m}}-1\right)}\frac{d}{h} = \mathrm{arctg}\left(1+\sqrt{1+\frac{M}{m}}\right)\frac{d}{2h}.$$

Číselně dostaneme $\alpha_{\max} = 36°$. **2 body**

Alternativní řešení pomocí diferenciálního počtu: Hledáme minimum funkce

$$y_{\mathrm{T}}\left(v\right) = \frac{mh^2+Mv^2}{2\left(mh+Mv\right)}.$$

Najdeme její derivaci a tu položíme rovnu nule:

$$\frac{\mathrm{d}y_{\mathrm{T}}\left(v\right)}{\mathrm{d}v} = \frac{2Mv\cdot 2\left(mh+Mv\right)-\left(mh^2+Mv^2\right)\cdot 2M}{4(mh+Mv)^2} =$$

$$= \frac{M\left(Mv^2+2mhv-mh^2\right)}{2(mh+Mv)^2} = 0.$$

Znaménko derivace určuje trojčlen $Mv^2+2mhv-mh^2$ představující vzhledem k výšce v kvadratickou funkci. Tato funkce je záporná uvnitř intervalu mezi kořeny rovnice a kladná vně. Funkce $y_t(v)$ je tedy vlevo od kladného kořenu $v_{\max}$ klesající a vpravo rostoucí, tedy $v_{\max}$ představuje minimum.

Alternativa „Alternativního řešení pomocí diferenciálního počtu": Extrém α_1 můžeme počítat přímo derivováním podle v_1 výše uvedeného funkčního vztahu

$$\alpha_1 = \mathrm{arctg}\frac{d\left(mh+Mv_1\right)}{mh^2+Mv_1^2}.$$

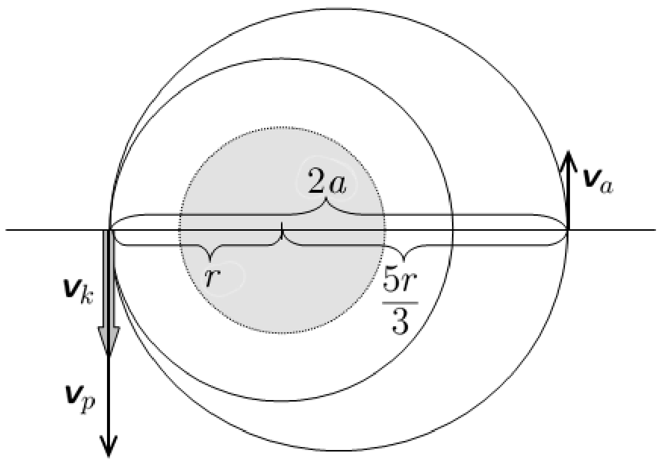
$$\frac{d\alpha_1}{dv_1} = \left\{1+\left[\frac{d\left(mh+Mv_1\right)}{mh^2+Mv_1^2}\right]^2\right\}^{-1}\frac{dM\left(mh^2+Mv_1^2\right)-d\left(mh+Mv_1\right)2Mv_1}{\left(mh^2+Mv_1^2\right)^2} =$$

$$= \frac{-\left(mh^2+Mv_1^2\right)^2 dM\left(Mv_1^2+2mh\nu_1-mh^2\right)}{\left(mh^2+Mv_1^2\right)^2+\left(d\left(mh+Mv_1\right)\right)^2},$$

tedy o extrému opět rozhoduje trojčlen

$$Mv_1^2+2mhv_1-mh^2$$

(opačné znaménko u derivace je v pořádku, neboť nyní hledáme maximum funkce).



Obr. R5

4.a) Označme m hmotnost družice. Z rovnosti dostředivé a gravitační síly

$$mr\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 = G\frac{Mm}{r^2}$$

dostaneme

$$\frac{4\pi^2}{T_1^2} = \frac{GM}{r^3} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{GMT_1^2}{4\pi^2}} = 8\,060\ \text{km}.$$

2 body

b) Do vztahu pro kruhovou rychlost

$$v_\text{k} = \frac{2\pi r}{T_1}$$

dosadíme již známý poloměr r a upravíme:

$$v_\text{k} = \frac{2\pi}{T_1}\sqrt[3]{\frac{GMT_1^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{2\pi GM}{T_1}} = 7\,040\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

2 body

c) Označme a délku hlavní poloosy eliptické trajektorie tělesa kosmického smetí. Družice i smetí obíhají kolem téhož mateřského tělesa (Země), a tak pro ně platí 3. Keplerův zákon:

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{a^3}{r^3} \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1\sqrt{\frac{a^3}{r^3}}.$$

Vzdálenosti a a r splňují vztah

$$2a = r + \frac{5}{3}r \quad \Rightarrow \quad a = \frac{4}{3}r.$$

Dosazením dostaneme

$$T_2 = T_1\sqrt{\frac{a^3}{r^3}} = T_1\sqrt{\frac{\left(\frac{4}{3}r\right)^3}{r^3}} = T_1\sqrt{\frac{64}{27}} = 11\,100\ \text{s}.$$

2 body

d) Při pohybu těles v centrálním gravitačním poli je splněn zákon zachování momentu hybnosti a zákon zachování mechanické energie. Napíšeme tyto zákony pro smetí ve dvou význačných bodech – v perigeu a v apogeu. Hmotnost smetí jakožto hmotnost obíhajícího tělesa označme opět m. Pak platí:

$$mv_\mathrm{p} \cdot r = mv_\mathrm{a} \cdot \frac{5}{3}r,$$

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{p}^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{a}^2 - \frac{GMm}{\frac{5}{3}r}.$$

Úpravami dostaneme

$$v_\mathrm{p} = \frac{5}{3}v_\mathrm{a},$$

$$v_\mathrm{p}^2 - \frac{2GM}{r} = v_\mathrm{a}^2 - \frac{6GM}{5r}.$$

Ze soustavy rovnic vyloučíme v_a a postupně vyjádříme v_p:

$$v_\mathrm{p}^2 - \frac{2GM}{r} = \frac{9}{25}v_\mathrm{p}^2 - \frac{6GM}{5r},$$

$$\frac{16}{25}v_\mathrm{p}^2 = \frac{4GM}{5r},$$

$$v_\mathrm{p}^2 = \frac{5GM}{4r}.$$

Užitím již známého poloměru r z části a) dostaneme

$$v_\mathrm{p}^2 = \frac{5GM}{4 \cdot \sqrt[3]{\frac{GMT_1^2}{4\pi^2}}} = \frac{5}{4}\sqrt[3]{\frac{4\pi^2G^2M^2}{T_1^2}} \quad \Rightarrow \quad v_\mathrm{p} = \sqrt{1,25} \cdot \sqrt[3]{\frac{2\pi GM}{T_1}}.$$

Relativní rychlost je

$$v_\mathrm{r} = v_\mathrm{p} - v_\mathrm{k} = \left(\sqrt{1,25} - 1\right) \cdot \sqrt[3]{\frac{2\pi GM}{T_1}} = 830\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

3 body

e) Přestože se obě tělesa v okamžiku srážky pohybují ve stejném směru, relativní rychlost je na pozemské poměry velká. Odpovídá rychlosti střely z pěchotních zbraní nebo rychlosti náboje z běžného děla. Při dostatečné hmotnosti jistě dokáže družici zničit. **1 bod**

5.a) Proud I_3 prochází pouze odpory R_3 a R_4, proto

$$I_3 = \frac{U_e}{R_3 + R_4} = 1\ \mathrm{A}.$$

1 bod

b) Při uzavření klíče bude dioda otevřená, bude-li potenciálový rozdíl mezi body A a B

$$\varphi_A - \varphi_B > U_0.$$

Zvolíme-li $\varphi_D = 0$, pak $\varphi_B = 0 + R_4 I_3 = 2\ \mathrm{V}$. Pro otevření diody musí být potenciál v bodě A roven alespoň $\varphi_A = \varphi_B + U_0 = 3\ \mathrm{V}$ a napětí na R_2 tedy bude také $U_2 = 3$ V. Odtud určíme proud $I_2 = \frac{U_2}{R_2} = 0{,}25$ A. Na sériovém rezistoru R_1 bude napětí $U_1 = U_\mathrm{e} - U_2 = 7$ V a bude jím procházet stejný proud I_2. Odpor R_1 vypočteme jako

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1} = 28\ \Omega.$$

Pokud bude odpor R_1 menší než 28 Ω, bude na něm menší napětí než 7 V, tudíž bude $\varphi_A > 3\ V$ a dioda bude otevřená. **4 body**

c) Diodou bude procházet proud $I_D = \frac{P}{U_0} = 1{,}25$ A.
Podle 2. Kirchhoffova zákona můžeme pro spodní smyčku napsat

$$U_e = R_3 I_3 + R_4 (I_3 + I_D) \ \Rightarrow\ I_3 = \frac{U_e - R_4 I_D}{R_3 + R_4} = \frac{U_e - R_4 \frac{P}{U_0}}{R_3 + R_4} = 0{,}75\ \text{A}.$$ **1 bod**

Podle 1. Kirchhoffova zákona $I_4 = I_3 + I_D = 2$ A **1 bod**

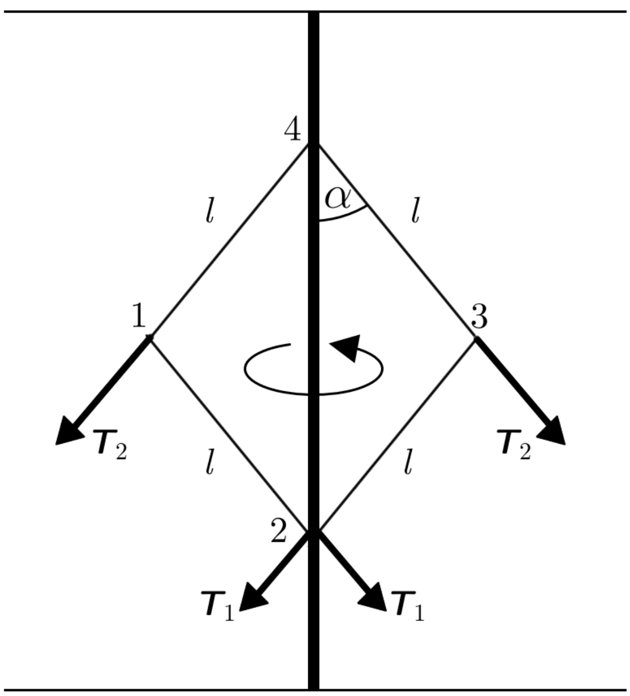
Pro pravou smyčku

$$R_2 I_2 - R_4 I_4 - U_0 = 0 \text{ a odtud } I_2 = \frac{U_0 + R_4 I_4}{R_2} = \frac{5}{12}\text{A}.$$ **1 bod**

Podle 1. Kirchhoffova zákona $I_1 = I_2 + I_D = \frac{5}{3}$ A. **1 bod**

Pak $R_1 = \dfrac{U_e - R_2 I_2}{I_1} = 3\ \Omega$. **1 bod**

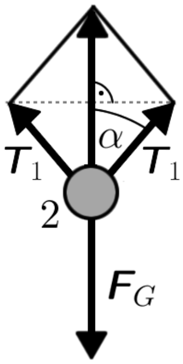
7. Protože hmotnosti tyčí jsou zanedbatelné, je jejich namáhání způsobeno tělesy 1, 2 a 3. Nejprve nakreslíme síly, kterými tělesa působí na tyče (tělesa zatím vynecháme). Vzhledem k symetrii jsou vždy dvě síly stejné a mají směr tyčí. Všechny tyče jsou namáhány tahem.



Obr. R6

Síly, kterými působí tyče na tělesa 1,2 a 3, mají podle zákona akce a reakce stejné velikosti a opačné orientace.

a) Na těleso 2 působí tři síly, které jsou v rovnováze.



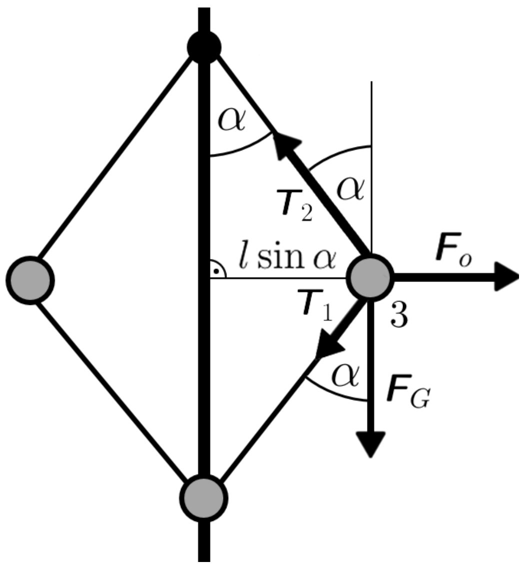
Obr. R7

Platí

$$\cos\alpha = \frac{\frac{F_G}{2}}{T_1} \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{mg}{2\cos\alpha} = 0{,}7\ \text{N}.$$

2 body

b) Na tělesa 1 a 3 působí 4 síly: $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$, $\boldsymbol{F}_G$ a setrvačná odstředivá síla $\boldsymbol{F}_o$, které jsou v rovnováze:



Obr. R8

Z rovnováhy svislých složek sil, na tělesa 1 a 3 plyne

$$T_2\cos\alpha = F_G + T_1\cos\alpha = mg + \frac{mg}{2\cos\alpha}\cos\alpha = \frac{3}{2}mg \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_2 = \frac{3mg}{2\cos\alpha} = 2{,}1\ \text{N}.$$

2 body

c) Z rovnováhy vodorovných složek plyne

$$F_o = T_1\sin\alpha + T_2\sin\alpha,$$

$$\frac{mv^2}{l\sin\alpha} = \frac{mg}{2\cos\alpha}\sin\alpha + \frac{3mg}{2\cos\alpha}\sin\alpha.$$

Rychlost, jakou se otáčejí tělesa 1 a 3 je

$$v = \sqrt{2gl\sin\alpha \operatorname{tg}\alpha} = 1{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

3 body

d) Vykonaná práce je rovna součtu kinetické energie těles 1 a 3 a zvýšení tíhové potenciální energie těles 1, 2 a 3 (třetí těleso se zvedne o dvakrát větší vzdálenost, než tělesa 1 a 2)

$$W = 2\frac{mv^2}{2} + 2mgl\,(1-\cos\alpha) + mg2l\,(1-\cos\alpha) =$$

$$= 2mgl\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha + 4mgl\,(1-\cos\alpha) = 2mgl\,(\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha + 2 - 2\cos\alpha) = 0{,}51\ \mathrm{J}.$$

3 body