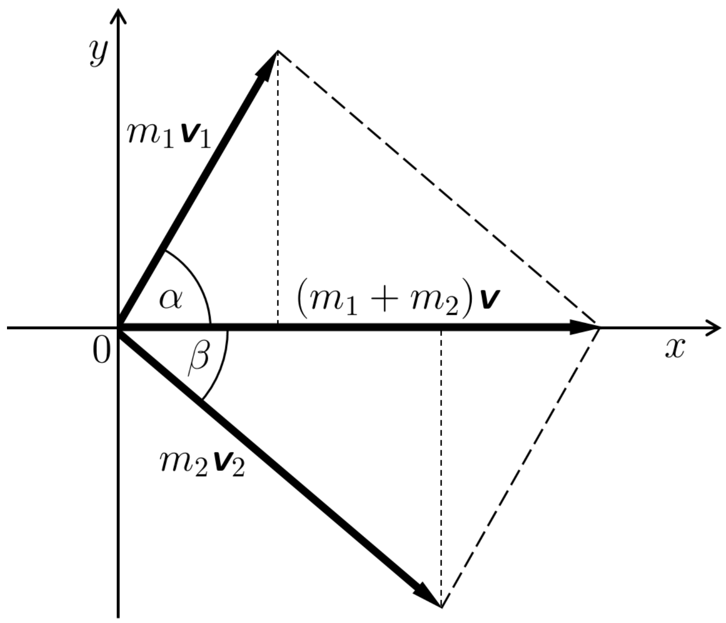
# Řešení úloh krajského kola 64. ročníku fyzikální olympiády

*Kategorie B*

Úlohy navrhli J. Jírů (1), V. Vícha (2) a J. Thomas (3, 4)




Obr. R1

**1.** a) Granát během exploze můžeme považovat za izolovanou soustavu, užijeme zákon zachování hybnosti:

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}, \tag{1}$$

tedy v souřadném systému dle obrázku R1 pro složky $x$ a $y$ platí

$$m_1 v_1 \cos\alpha + m_2 v_2 \cos\beta = (m_1 + m_2)\, v,$$

$$m_1 v_1 \sin\alpha = m_2 v_2 \sin\beta.$$

Dosazením $v_1 = 4v$, $v_2 = 7v$, $\cos\alpha = 0,5$ a $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dostaneme

$$2m_1 + 7m_2\cos\beta = m_1 + m_2,$$

$$2\sqrt{3}m_1 = 7m_2\sin\beta.$$

Neznámý úhel $\beta$ vyloučíme užitím vztahu $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$. Z rovnic plyne

$$\cos^2\beta = \frac{(m_2 - m_1)^2}{49m_2^2} = \frac{1}{49} - \frac{2m_1}{49m_2} + \frac{m_1^2}{49m_2^2},$$

$$\sin^2\beta = \frac{12m_1^2}{49m_2^2}.$$

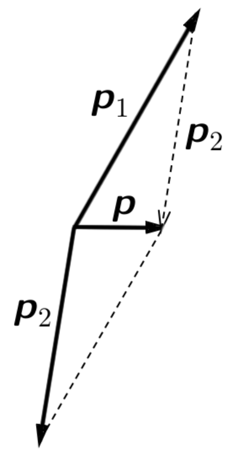
Po dosazení a úpravě dostaneme kvadratickou rovnici

$$13\frac{m_1^2}{m_2^2} - 2\frac{m_1}{m_2} - 48 = 0. \tag{2}$$

Řešením jsou dva kořeny $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1\pm 25}{13}$, fyzikální význam má pouze kladný kořen $\frac{m_1}{m_2} = 2$. **5 bodů**

b) Označme $m = m_1 + m_2$ celkovou hmotnost granátu. Pak na základě výsledku a) platí $m_1 = \frac{2}{3}m$, $m_2 = \frac{1}{3}m$. Velikosti jednotlivých hybností jsou

$$p = mv,$$
$$p_1 = m_1 v_1 = \frac{2}{3}m \cdot 4v = \frac{8}{3}mv,$$
$$p_2 = m_2 v_2 = \frac{1}{3}m \cdot v = \frac{7}{3}mv.$$



Obr. R2

Postupný poměr hybností je tedy $p : p_1 : p_2 = 3 : 8 : 7$. Nyní sestrojíme trojúhelník (věta *sss*) s délkami stran $p$, $p_1$, $p_2$ a doplníme na rovnoběžník. Místo hybnosti o velikosti $p_2$ je možné použít známý úhel $\alpha$ (věta *sus*). (V sestrojeném diagramu vychází úhel $\beta$ mezi vektory $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{p}_2$ tupý. Podle zadání je $m_2 < m_1$, tudíž dle předchozího odvození $\cos\beta = \dfrac{m_2 - m_1}{7m_2} < 0$.)

**3 body**

c) Hledaný poměr energií je

$$\frac{E'_k}{E_k} = \frac{\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{\frac{2}{3}m \cdot (4v)^2 + \frac{1}{3}m \cdot (7v)^2}{mv^2} = 27.$$

**2 body**

*Alternativní řešení části a):* Ve znázorněném diagramu skládání hybností v a) použijeme kosinovou větu:

$$m_2^2 v_2^2 = m_1^2 v_1^2 + (m_1 + m_2)^2 v^2 - 2 \cdot m_1 v_1 \cdot (m_1 + m_2)\, v \cdot \cos\alpha.$$

Dosazením $v_1 = 4v$, $v_2 = 7v$ a $\cos\alpha = 0,5$ dostaneme

$$49m_2^2 = 16m_1^2 + (m_1 + m_2)^2 - 4m_1 (m_1 + m_2),$$

což opět vede na kvadratickou rovnici (2).

*Poznámka:* Pro hmotnost hmotnější ze dvou částí platí $m_1 > \frac{1}{2}(m_1 + m_2)$ a tedy velikost její hybnosti $m_1 v_1 = 4m_1 v > 2(m_1 + m_2)v$. Z vektorového diagramu skládání hybností podle (1) je tedy při daném zadání (ještě před dalším výpočtem) zřejmé, že úhel $\beta$ bude tupý.

**2.** a) Protože je na začátku měření teplotní rozdíl v kalorimetrech nulový, je zřejmé, že počáteční teplota kousků ledu je v obou kalorimetrech stejná $t_{01} = t_{02}$. Do času $\tau_1$ je v obou kalorimetrech pouze led o teplotách zřejmě menších než 0 °C, který se postupně ohřívá a ještě netaje. V prvním kalorimetru roste teplota rychleji, protože ledu je menší množství. V čase $\tau_1$ začne led v prvním kalorimetru tát a teplotní rozdíl $\Delta t$ se zmenšuje až do času $\tau_2$, kdy začne tát led i ve druhém kalorimetru. V časovém intervalu $(\tau_2;\ \tau_3)$ taje led v obou kalorimetrech a teplota je v nich stejná ($t_0 = 0$ °C), tedy $\Delta t = 0$. V čase $\tau_3$ právě roztál všechen led v prvním kalorimetru a v časovém intervalu $(\tau_3;\ \tau_4)$ se v prvním kalorimetru ohřívá voda vzniklá z ledu, zatímco ve druhém kalorimetru ještě pokračuje tání ledu. V intervalu $(\tau_4;\ \tau_k)$ je již v obou kalorimetrech voda, která se postupně ohřívá. V prvním kalorimetru roste teplota rychleji než ve druhém. **2 body**

b) K určení výkonu potřebujeme znát dobu $\tau_r$, potřebnou k roztátí ledu o hmotnosti $\Delta m$, zahřátého na teplotu 0 °C. Z grafu určíme

$$\tau_r = [(\tau_4 - \tau_2) - (\tau_3 - \tau_1)] = 91{,}7 \text{ s.}$$

Teplo na roztátí tohoto množství ledu dodá vařič

$$P\tau_r = \Delta m l_t \quad \Rightarrow \quad P = \frac{\Delta m l_t}{\tau_r} = 360 \text{ W.}$$ **2 body**

c, d) Protože zahřátí ledu o hmotnosti $\Delta m$ z počáteční teploty $t_{01}$ na teplotu tání $t_0 = 0$ °C trvalo dobu $(\tau_2 - \tau_1)$, můžeme určit počáteční teplotu ledu $t_{01}$ a $t_{02}$.

$P(\tau_2 - \tau_1) = \Delta m c_l\,(t_0 - t_{01}) \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad t_{01} = t_{02} = t_0 - \frac{P(\tau_2 - \tau_1)}{\Delta m c_l} = t_0 - \frac{\Delta m l_t}{\tau_r} . \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{\Delta m c_l} =$$

$$= t_0 - \frac{l_t}{\tau_r} \cdot \frac{(\tau_2 - \tau_1)}{c_l} = -40 \text{ °C.}$$

**2 body**

Protože zahřívání menšího kousku ledu do teploty $t_0 = 0$ °C trvalo dobu $\tau_1$, můžeme určit jeho hmotnost $m_1$:

$$P\tau_1 = m_1 c_l\,(t_0 - t_{01}) \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{P.\tau_1}{c_l\,(t_0 - t_{01})} = \frac{\Delta m l_t}{\tau_r}\frac{\tau_1}{c_l\,(t_0 - t_{01})} = 0{,}3 \text{ kg.}$$

Hmotnost druhého kousku ledu pak je

$$m_2 = m_1 + \Delta m = 0{,}4 \text{ kg.}$$ **2 body**

Zahřívání vody o hmotnosti $m_1$ z teploty $t_0 = 0$ °C na konečnou teplotu $t_{k1}$ v prvním kalorimetru trvá $\tau_k - \tau_3 = 255$ s, vařič dodá teplo

$$P(\tau_k - \tau_3) = m_1 c_v\,(t_{k1} - t_0) \quad \Rightarrow \quad t_{k1} = t_0 + \frac{P(\tau_k - \tau_3)}{m_1 c_v} =$$

$$= t_0 + \frac{\Delta m l_t}{\tau_r}\frac{(\tau_k - \tau_3)}{m_1 c_v} = t_0 + \frac{c_l\,(t_0 - t_{01})\,(\tau_k - \tau_3)}{\tau_1 c_v} = 73 \text{ °C.}$$

V prvním kalorimetru tedy bude výsledná teplota vody 73 °C.
V druhém kalorimetru se voda o hmotnosti $m_2$ z teploty $t_0 = 0$ °C na konečnou teplotu $t_{k2}$ ohřeje za dobu $\tau_k - \tau_4 = 140$ s, vařič dodá teplo

$$P(\tau_k - \tau_4) = m_2 c_v\,(t_{k2} - t_0) \quad \Rightarrow \quad t_{k2} = t_0 + \frac{P(\tau_k - \tau_4)}{m_2 c_v} = 30 \text{ °C.}$$

Výsledná teplota vody v druhém kalorimetru bude 30 °C. **2 body**

*Alternativní určení hmotností* (bez předchozího výpočtu výkonu $P$): Ze vztahů

$$P\tau_2 = (m_1 + \Delta m)c_l\,(t_0 - t_{01})\,,$$
$$P\tau_1 = m_1 c_l\,(t_0 - t_{01})$$

plyne

$$\frac{m_1 + \Delta m}{m_1} = \frac{\tau_2}{\tau_1},$$

odkud

$$m_1 = \frac{\Delta m\;\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} = 0{,}3\ \text{kg}, \quad m_2 = m_1 + \ \Delta m = 0{,}4\ \text{kg}.$$

**3.** a) Rezistorem prochází proud $I = \dfrac{U_e}{R + R_i}$. Po připojení druhého rezistoru se proud bude větvit do dvou stejných větví. V původní větvi bude proud

$$\frac{5}{6}I = \frac{1}{2}\frac{U_e}{\frac{R}{2} + R_i}.$$

Porovnáním těchto vztahů

$$\frac{5}{6}\frac{U_e}{R + R_i} = \frac{1}{2}\frac{U_e}{\frac{R}{2} + R_i} \quad\Rightarrow\quad R_i = \frac{R}{4} \ \text{ a } \ U_e = \frac{5}{4}RI.$$ **4 body**

b) Výkon zdroje ve vnější části obvodu závisí na proudu podle vztahu

$$P = UI = (U_e - R_i I)\,I = U_e I - R_i I^2.$$

Maximální bude při proudu $I_{\max}$, který odpovídá maximu paraboly, tedy když $I_{\max} = \dfrac{U_e}{2R_i}$.

Maximální výkon ve vnější části obvodu bude

$$P_{\max} = U_e \cdot \frac{U_e}{2R_i} - R_i \cdot \left(\frac{U_e}{2R_i}\right)^2 = \frac{U_e^2}{4R_i} = \frac{25}{16}RI^2.$$ **2 body**

Odpor $R'$ odpovídající tomuto výkonu musí splňovat podmínku

$$U_e = I_{\max}\,(R' + R_i)\,, \quad \text{tj. } U_e = \frac{U_e}{2R_i}\,(R' + R_i)\,,$$

odkud plyne

$$R' = R_i = \frac{R}{4}.$$ **1 bod**

*Poznámka:* Pokud student ví, že výkon ve vnější části obvodu je maximální, když vnější odpor je roven vnitřnímu odporu, získá 1 bod i bez odvození z maxima kvadratické funkce.

c) Zkratový proud má hodnotu $I_k = \dfrac{U_e}{R_i} = 5I$.

Účinnost obvodu v prvním případě bude $\eta_1 = \dfrac{R}{R + R_i} = 0{,}80$ resp. 80 %, a ve druhém případě $\eta_2 = \dfrac{R_i}{2R_i} = 0{,}50$, resp. 50 %. **3 body**

*Alternativní postup řešení části b):* Výkon zdroje ve vnější části obvodu závisí na proudu podle vztahu

$$P = UI = (U_e - R_i I)\, I = U_e I - R_i I^2.$$

Maximální bude při proudu $I_{\max}$, který odpovídá maximu paraboly, tedy když $I_{\max} = \dfrac{U_e}{2R_i}$.

Odpor $R'$ odpovídající tomuto výkonu musí splňovat podmínku

$$U_e = I_{\max}\,(R' + R_i)\,, \quad \text{tj.} U_e = \frac{U_e}{2R_i}\,(R' + R_i)\,,$$

odkud plyne $R' = R_i = \frac{R}{4}$. **1 bod**

Maximální výkon ve vnější části obvodu bude

$$P_{\max} = R' I_{\max}^2 = \frac{25}{16} R I^2.$$ **2 body**

**4.** a) *Varianta 1 – řešení v rotující neinerciální soustavě souřadné*, která se otáčí spolu s kuličkou kolem svislé osy procházející bodem závěsu pružiny. V této soustavě je závaží v klidu, proto výslednice všech sil (tíhové, odstředivé setrvačné a síly pružnosti) musí být nulová (viz obr. R3).

$$\boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{F}_o + \boldsymbol{F} = 0$$

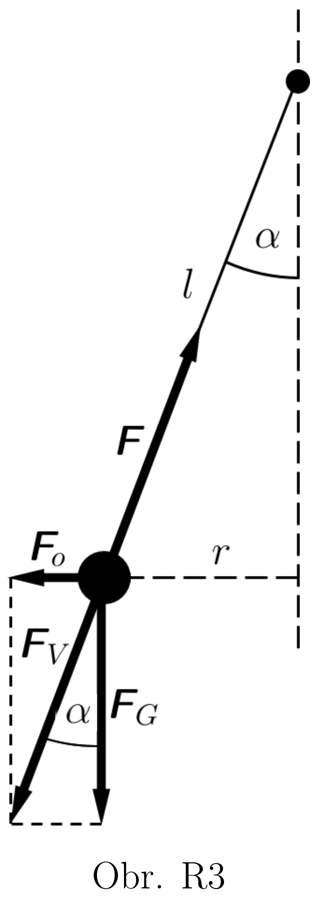
Výslednice $\boldsymbol{F}_V$ sil $\boldsymbol{F}_G$ a $\boldsymbol{F}_o$ musí tedy být stejně velká a opačně orientovaná než síla $\boldsymbol{F}$, kterou napjatá pružina působí na kuličku (viz obr. R3).

Nejprve určíme poloměr $r$ kružnice, po které krouží závaží. Pro poměr mezi odstředivou a tíhovou silou platí (viz obr. R3)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_O}{F_G} = \frac{m\dfrac{4\pi^2}{T^2}r}{mg}.$$

Odtud

$$r = \frac{gT^2 \operatorname{tg}\alpha}{4\pi^2} = 0{,}143\ \text{m}.$$ **1 bod**




Obr. R3

Pro délku $l$ pak dostáváme:

$$l = \frac{r}{\sin\alpha} = \frac{gT^2}{4\pi^2\cos\alpha} = 0{,}287\ \text{m}.$$

**1 bod**

Pro velikost síly napínající pružinu platí z obr. R3:

$$F = \frac{mg}{\cos\alpha} = 2{,}27\ \text{N}.$$

**2 body**

Případně

$$F=\sqrt{F_G^2+F_O^2}=mg\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=mg\sqrt{\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{mg}{\cos\alpha}=2{,}27\ \mathrm{N}.$$

Této síle odpovídá prodloužení pružiny $\Delta l=\dfrac{F}{k}=\dfrac{mg}{k\cos\alpha}=1{,}1\ \mathrm{cm}.$ **2 body**

b) Modifikováním předchozího vzorce pro celkové prodloužení pružiny $\Delta l+\Delta l_1$ dostaneme

$$\Delta l+\Delta l_1=\frac{\mathrm{mg}}{k\cos\alpha_1}.$$

Odtud

$$\cos\alpha_1=\frac{mg}{k\ (\Delta l+\Delta l_1)}=\frac{mg}{\dfrac{mg}{\cos\alpha}+k\Delta l_1}=0{,}482\,6,\ \ \alpha_1=61^\circ.$$

Ke stejnému výsledku dospějeme i ze vztahu $\cos\alpha_1=\dfrac{F_G}{F_1}$. **2 body**

c) Označme $l_1=l+\Delta l_1$ délku pružiny. Ze vztahu mezi odstředivou a tíhovou silou

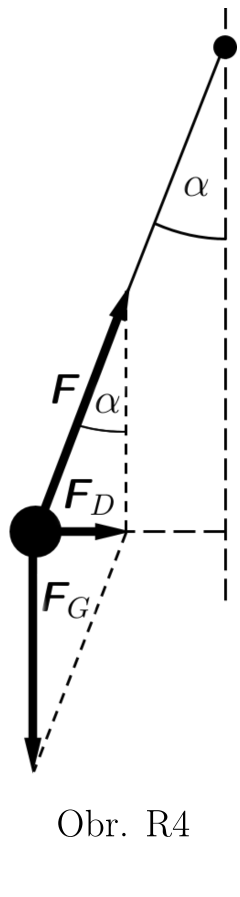
$$\mathrm{tg}\,\alpha_1=\frac{F_{O1}}{F_G}=\frac{m\omega_1^2\ l_1\sin\alpha_1}{mg}$$

plyne

$$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{(l+\Delta l_1)\cos\alpha_1}}=8{,}27\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}.$$ **2 body**

*Varianta 2 – řešení v inerciální soustavě souřadné*, ve které závaží opisuje kružnici. V této soustavě působí na závaží (jen) tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ a síla pružnosti $\boldsymbol{F}$ (obr. R4). Výslednice těchto sil je dostředivou silou $\boldsymbol{F}_D$ působící na závaží při jeho pohybu po kružnici. Výše odvozené vztahy zůstávají v platnosti, pokud v nich místo odstředivé setrvačné síly $\boldsymbol{F}_o$ píšeme dostředivou sílu $\boldsymbol{F}_D$.

**2 body**




Obr. R4