Řešení úloh 1. kola 64. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*
Autor úloh: J. Jírů (1), J. Thomas (2, 3, 4, 5, 6, 7)

1.a) Ze stavové rovnice dostaneme počet molekul neznámého uhlovodíku

$$N = \frac{pV}{kT}.$$

Hmotnost jedné molekuly uhlovodíku je

$$m_0 = \frac{m}{N} = \frac{mkT}{pV}$$

a relativní molekulová hmotnost uhlovodíku

$$M_r = \frac{m_0}{m_\mathrm{u}} = \frac{mkT}{pVm_\mathrm{u}} = 44{,}1.$$ **3 body**

Označíme-li x počet atomů uhlíku a y počet atomů vodíku v molekule uhlovodíku $\mathrm{C_xH_y}$, pak platí

$$M_r = xA_r(\mathrm{C}) + yA_r(\mathrm{H}),$$

kde hodnoty x a y musí být přirozená čísla. V tabulkách najdeme $A_r(\mathrm{H}) = 1{,}007\,9$, $A_r(\mathrm{C}) = 12{,}011$. Po dosazení dostaneme rovnici o dvou neznámých

$$44{,}1 = 12{,}011x + 1{,}007\,9y.$$

Číselné hodnoty relativní molekulové hmotnosti a relativních atomových hmotností se shora blíží k celým číslům, proto je v rovnici na celá čísla zaokrouhlíme:

$$44 = 12x + y.$$

Rovnice má v množině přirozených čísel tři matematická řešení:

$$x = 1,\ y = 32,$$

$$x = 2,\ y = 20,$$

$$x = 3,\ y = 8.$$

Pouze třetí řešení vyhovuje existujícímu uhlovodíku, kterým je propan $\mathrm{C_3H_8}$.
3 body

V nádobě je uhlík o hmotnosti

$$m\,(\mathrm{C}) = \frac{3A_r(\mathrm{C})}{M_r}m = \frac{36}{44}m = 286\ \mathrm{g}$$

a vodík o hmotnosti

$$m\,(\mathrm{H}) = m - m\,(\mathrm{C}) = 64\ \mathrm{g}.$$

2 body

Poznámka: Příčinou toho, proč z původní rovnice nevyjde dvojice x, y celočíselně, je skutečnost, že relativní molekulovou hmotnost nelze z údajů v zadání zjistit s větší přesností než na tři platné číslice.

b) Počet atomů uhlíku a počet atomů vodíku v nádobě jsou

$$N(\mathrm{C}) = 3N = 3\frac{m}{M_r m_\mathrm{u}} = 1{,}44 \cdot 10^{25},$$

$$N(\mathrm{H}) = \frac{8}{3}N(\mathrm{C}) = 3{,}83 \cdot 10^{25}.$$

2 body

Alternativní řešení: Úlohu je možné řešit pomocí molárních veličin.

a) Ze stavové rovnice dostaneme molární hmotnost neznámého uhlovodíku

$$M_m = \frac{mRT}{pV} = 44{,}1\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}.$$

Označíme-li x počet atomů uhlíku a y počet atomů vodíku v molekule uhlovodíku $\mathrm{C_xH_y}$, pak platí

$$M_m = xM_m(\mathrm{C}) + yM_m(\mathrm{H}),$$

kde hodnoty x a y musí být přirozená čísla. V tabulkách najdeme $M_r(\mathrm{H}) = 1{,}007\,9\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$, $M_r(\mathrm{C}) = 12{,}011\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$. Po dosazení dostaneme rovnici o dvou neznámých

$$44{,}1 = 12{,}011x + 1{,}007\,9y.$$

Další postup je shodný s původním.

b) Počet atomů uhlíku a počet atomů vodíku v nádobě jsou

$$N(\mathrm{C}) = 3N = 3nN_A = 3\frac{m}{M_m}N_A = 1{,}44 \cdot 10^{25},$$

$$N(\mathrm{H}) = \frac{8}{3}N(\mathrm{C}) = 3{,}83 \cdot 10^{25}.$$

2. a) Rozjíždění z dolní stanice trvá $t_1 = \dfrac{v}{a} = 42{,}4$ s, při rozjíždění urazí vzdálenost

$$s_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = 225\ \mathrm{m}.$$ **0,5 bodu**

Jízda rovnoměrným pohybem trvá

$$t_2 = \frac{s}{v} = \frac{1254 - 225 - 100}{10{,}6}\,\mathrm{s} = \frac{929}{10{,}6}\ \mathrm{s} = 87{,}6\ \mathrm{s}.$$ **0,5 bodu**

Zpomalování před podpěrou trvá

$$t_3 = \frac{\Delta v}{a} = \frac{2{,}1}{0{,}25}\ \mathrm{s} = 8{,}4\ \mathrm{s}.$$ **0,5 bodu**

Zpomalování proběhne na dráze

$$s_3 = vt_3 - \frac{1}{2}at_3^2 = 80\ \mathrm{m}.$$ **0,5 bodu**

20 m k podpěře a dalších 20 m za podpěrou se kabina pohybuje sníženou rychlostí po dobu

$$t_4 = \frac{s_4}{v_1} = \frac{40}{8{,}5}\ \mathrm{s} = 4{,}7\ \mathrm{s}.$$ **0,5 bodu**

Poté kabina zrychlí na provozní rychlost za dobu

$$t_5 = t_3 = \frac{\Delta v}{a} = \frac{2{,}1}{0{,}25}\ \mathrm{s} = 8{,}4\ \mathrm{s}, \qquad \textbf{0,5 bodu}$$

na dráze $s_5 = v_1 t_5 + \frac{1}{2} a t_5^2 = 80\ \mathrm{m}$. **0,5 bodu**

Kabina je nyní 100 m za podpěrou a bude se pohybovat rovnoměrně až do vzdálenosti 225 m před konečnou stanicí. Rovnoměrně se bude pohybovat po dobu

$$t_6 = \frac{s_6}{v} = \frac{3\,213 - 100 - 225}{10{,}6}\ \mathrm{s} = 272\ \mathrm{s}. \qquad \textbf{0,5 bodu}$$

Doba brzdění před konečnou stanicí

$$t_7 = t_1 = \frac{v}{a} = \frac{10{,}6}{0{,}25}\ \mathrm{s} = 42\ \mathrm{s}. \qquad \textbf{0,5 bodu}$$

Celková doba jízdy lanovky

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 = 466\ \mathrm{s}. \qquad \textbf{0,5 bodu}$$

b) Hmotnost jednoho lana nad podpěrou je

$$m = \rho V = \rho \frac{\pi d^2}{4} l = 7\,600 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \frac{\pi\, 0,072^2 \mathrm{m}^2}{4} 3\,213\ \mathrm{m} = 99\ \mathrm{t}. \qquad \textbf{1 bod}$$

Hmotnost dvou lan a kabiny, která je na nich položena, je dohromady 224 t. Na horní upevnění působí 5/6 tíhy lan a kabiny, tedy síla

$$F = \frac{5}{6}\left(2m + m_k\right) g = 1\,830\ \mathrm{kN}.$$

Protože lana jsou dvě, působí na každé z nich poloviční síla

$$F_1 = \frac{F}{2} = \frac{5}{12}\left(2m + m_k\right) g = 915\ \mathrm{kN}. \qquad \textbf{2 body}$$

c) Mez pevnosti lana musí být k-krát větší, než předpokládané namáhání

$$\sigma_p = k \frac{F_1}{S} = 5 \frac{915\ \mathrm{kN}}{\frac{\pi\, 0,072^2 \mathrm{m}^2}{4}} = 1{,}1\ \mathrm{GPa}. \qquad \textbf{2 body}$$

3.a) Celkový objem ledu s kuličkou je

$$V = \frac{M}{\rho_l} + \frac{m_2}{\rho} = 131\ \mathrm{cm}^3. \qquad \textbf{2 body}$$

Podle Archimédova zákona se vztlaková síla rovná síle tíhové. Je-li pod vodou část objemu V_1 platí

$$V_1 \rho_v g = \left(M + m_2\right) g \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{M + m_2}{\rho_v},$$

je nad vodou objem

$$V_2 = V - V_1 = \frac{M}{\rho_l} + \frac{m_2}{\rho} - \frac{M + m_2}{\rho_v} = 6\ \mathrm{cm}^3,$$

tedy 4,6 % celkového objemu. **2 body**

b) Na ochlazení vody a kalorimetru na teplotu $t_0 = 0$ °C musí být odebráno teplo

$$Q_1 = (C + m_1 c_v)(t_1 - t_0) = (120 + 0{,}25 \cdot 4{,}2 \cdot 10^3) \cdot 15 \text{ J} = 17{,}55 \text{ kJ}.$$

Led s kuličkou na ohřátí z teploty t_2 na teplotu t_0 potřebují teplo

$$Q_2 = (Mc_l + m_2 c_2)(t_0 - t_2) = \left(0{,}12 \cdot 2{,}1 \cdot 10^3 + 0{,}005 \cdot 450\right) \cdot 18 \text{ J} = 4{,}58 \text{ kJ}.$$

Na roztátí ledu je potřeba teplo tání

$$L_t = Ml_t = 0{,}12 \cdot 332 \text{ kJ} = 39{,}84 \text{ kJ}.$$

3 body

Roztaje tedy jen část ledu o hmotnosti $M_1 = \dfrac{Q_1 - Q_2}{l_t} = 39$ g. V kalorimetru nyní bude 290 g vody o teplotě 0 °C a menší kousek ledu s kuličkou. Objem ledu s kuličkou nyní je

$$V' = \frac{M - M_1}{\rho_l} + \frac{m_2}{\rho} = 88{,}7 \text{ cm}^3.$$

Vztlaková síla by v případě úplného ponoření ledu měla velikost

$$F_{\text{vz}} = V' \rho_v g = 87{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot 1\,000 \cdot 9{,}81 \text{ N} = 0{,}86 \text{ N}$$

a tíhová síla $F_G = (M - M_1 + m_2)\, g = 0{,}83 \text{ N} < F_{\text{vz}}$.

Zbytek ledu s kuličkou bude tedy nadále plovat na hladině. Pod hladinou nyní bude větší část zbylého objemu

$$V_1' = \frac{M - M_1 + m_2}{\rho_v} = 86 \text{ cm}^3.$$

Nad hladinou pak bude objem

$$V_2' = V' - V_1' = \frac{M - M_1}{\rho_l} + \frac{m_2}{\rho} - \frac{M - M_1 + m_2}{\rho_v} = 2{,}6 \text{ cm}^3,$$

tedy 3,0 % celkového objemu.

3 body

4.a) Bude-li pro velikost tíhové síly závaží F_{G} platit: $Mg > mg \sin\alpha + fmg\cos\alpha$, pojede deska po nakloněné rovině nahoru.

Bude-li pro velikost tíhové síly závaží F_{G} platit: $Mg < mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha$, pojede deska po nakloněné rovině směrem dolů. Deska zůstane v klidu, bude-li platit

$$m(\sin\alpha - f\cos\alpha) \leq M \leq m(\sin\alpha + f\cos\alpha),$$

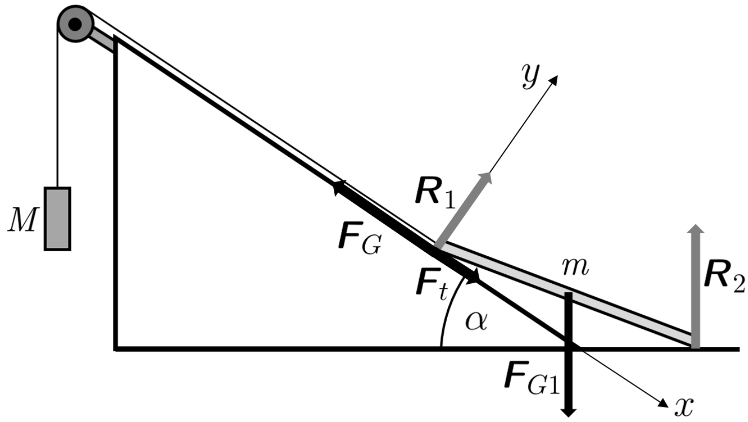
tedy $0{,}57 \text{ kg} \leq M \leq 0{,}85 \text{ kg}$.

3 body

b) Nakreslíme všechny síly, které působí na ležící desku. $\boldsymbol{R}_1$ a $\boldsymbol{R}_2$ jsou reakce nakloněné resp. vodorovné roviny, $\boldsymbol{F}_t$ je síla tření o velikosti $F_t = fR_1$.

Zvolme osu x podél nakloněné roviny a osu y k ní kolmou. Úhel mezi vodorovnou rovinou a deskou označme β. Při maximální velikosti síly F_{Gmax}, při které se deska ještě nedá do pohybu směrem nahoru, platí rovnováha sil:

$$F_{G\,\max} + R_2 \sin\alpha = F_t + F_{G1}\sin\alpha,$$
$$F_{G1}\cos\alpha = R_1 + R_2\cos\alpha.$$



Obr. R1

Podle momentové věty vzhledem k dotykové přímce nakloněné roviny a desky:

$$R_2 l \cos\beta = F_{G1}\frac{l}{2}\cos\beta.$$

Zde l je délka desky, $F_{G1} = mg$ a β je úhel mezi deskou a vodorovnou rovinou. Řešením soustavy rovnic dostaneme:

$$F_{G\max} = \frac{mg}{2}\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right).$$

4 body

Podobně při minimální velikosti síly $F_{G\min}$, při které se deska ještě nedá do pohybu směrem dolů, platí rovnováha sil a rovnováha momentů sil:

$$F_{G\min} + F_t + R_2\sin\alpha = F_{G1}\sin\alpha,$$
$$F_{G1}\cos\alpha = R_1 + R_2\cos\alpha,$$
$$R_2 l\cos\beta = F_{G1}\frac{l}{2}\cos\beta.$$

Řešením soustavy rovnic dostaneme

$$F_{G\min} = \frac{mg}{2}(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

Deska zůstane v klidu, bude-li platit

$$\frac{m}{2}(\sin\alpha - f\cos\alpha) \leq M \leq \frac{m}{2}(\sin\alpha + f\cos\alpha),$$

tedy $0{,}28\ \mathrm{kg} \leq M \leq 0{,}42\ \mathrm{kg}$.

3 body

5.a) Při rovnoměrném pohybu tělesa na nakloněné rovině je splněna podmínka

$$a = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = 0 \quad\Rightarrow\quad f = \mathrm{tg}\,\alpha.$$

Vztah (2) odvodíme z rovnováhy sil a momentů sil, které na opřené pravítko působí.
Z rovnováhy sil

$$f_1 N_1 = N_2 \text{ a } f N_2 + N_1 = mg.$$

Z rovnováhy momentů sil vzhledem k ose otáčení procházející kolmo k nákresně bodem B a bodem A

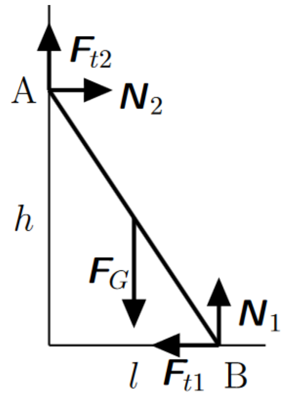
$$N_2 h + f N_2 l = mg\frac{l}{2} \text{ a } N_1 l = f_1 N_1 h + mg\frac{l}{2}.$$

Použijeme libovolnou trojici ze čtyř uvedených rovnic.
Úpravou

$$N_2 h + f N_2 l = N_1 l - f_1 N_1 h,$$

$$f_1 N_1 h + f f_1 N_1 l = N_1 l - f_1 N_1 h,$$

$$2 f_1 h + f f_1 l = l \quad \Rightarrow \quad f_1 = \frac{l}{2h + fl}.$$



Obr. R2

b) Plastové pravítko na dřevěném pravítku

$\frac{l}{\text{cm}}$	$\frac{h}{\text{cm}}$	$f = \operatorname{tg}\alpha$
13,0	50,0	0,26
14,5	50,0	0,29
16,5	49,5	0,33
13,5	50,0	0,27
12,0	49,0	0,35

Součinitel tření $f = (0{,}30 \pm 0{,}04)$ s relativní odchylkou 13,3 %.

Kovové pravítko na dřevěném pravítku

$\frac{l}{\text{cm}}$	$\frac{h}{\text{cm}}$	$f = \operatorname{tg}\alpha$
12,0	51,0	0,24
13,0	50,5	0,26
15,0	49,5	0,30
14,5	50,5	0,29
14,5	50,5	0,29

Součinitel tření $f = (0{,}28 \pm 0{,}03)$ s relativní odchylkou 9,1 %.

c) Plastové pravítko na stolní desce opřené o dřevěné pravítko:
Součinitel tření $f = (0{,}202 \pm 0{,}004)$ s relativní odchylkou 2,2 %.

$\frac{l}{\text{cm}}$	$\frac{h}{\text{cm}}$	$f_1 = \frac{l}{2h + fl}$
12,0	29,0	0,195
12,7	29,3	0,203
12,9	29,2	0,207
12,5	29,4	0,200
12,6	29,2	0,203

Kovové pravítko na stolní desce, opřené o dřevěné pravítko:

$\frac{l}{\text{cm}}$	$\frac{h}{\text{cm}}$	$f_1 = \frac{l}{2h + fl}$
14,1	39,0	0,172
14,8	38,8	0,181
14,5	39,0	0,177
14,4	39,1	0,175
14,2	39,0	0,174

Součinitel tření $f = (0{,}176 \pm 0{,}003)$ s relativní odchylkou 1,9 %.

6.a) Na závěs působí tíhová síla

$$F_1 = m_1 g + 2m_2 g = \rho_t \pi r^2 l g + 2\rho_k \pi R^2 d g = 44{,}5\ \text{N}.$$

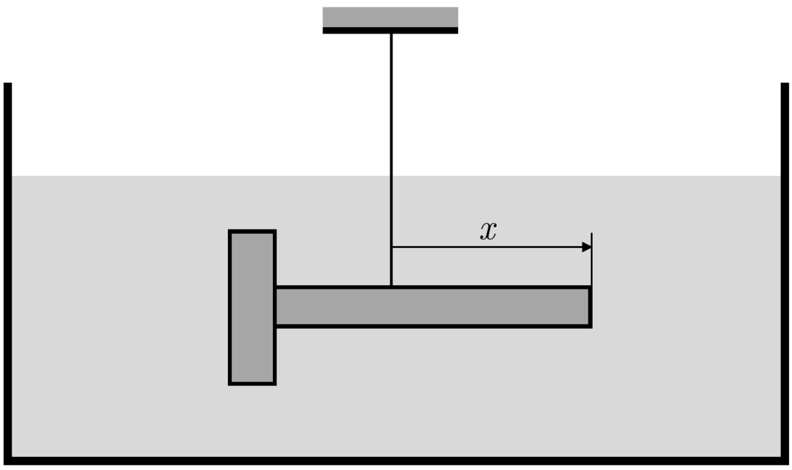
2 body

b) Ve vodě bude na závěs působit tíhová síla, zmenšená o sílu vztlakovou

$$F_2 = m_1 g + 2m_2 g - V_1 \rho_v g - 2V_2 \rho_v g = (\rho_t - \rho_v)\,\pi r^2 l g + 2\,(\rho_k - \rho_v)\,\pi R^2 d g = 20{,}6\ \text{N}.$$

3 body

c) Označme x vzdálenost těžiště od pravého konce tyče (obr. R3).



Obr. R3

Platí rovnováha momentů vzhledem k bodu závěsu

$$(\rho_k - \rho_v)\,\pi R^2 d g \left(l - x + \frac{d}{2}\right) - (\rho_t - \rho_v)\,\pi r^2 l g \left(-\frac{l}{2} + x\right) = 0.$$

Odtud
$$x = \frac{(\rho_k - \rho_v) R^2 d \left(l + \frac{d}{2}\right) + (\rho_t - \rho_v) r^2 l \frac{l}{2}}{(\rho_k - \rho_v) R^2 d + (\rho_t - \rho_v) r^2 l} = 12{,}3 \text{ cm}.$$
Zbytek činky musíme zavěsit 12,3 cm od konce tyče. **3 body**

Závěs nyní bude napínán silou
$$F_3 = m_1 g + m_2 g - V_1 \rho_v g - V_2 \rho_v g = (\rho_t - \rho_v) \pi r^2 l g + (\rho_k - \rho_v) \pi R^2 d g = 13{,}2 \text{ N}.$$
2 body

7. Při ději 1-2-3-4 plyn přijme teplo
$$Q = Q_{12} + Q_{23} = \frac{5}{2} nR (T_2 - T_1) + \frac{7}{2} nR (T_3 - T_2). \tag{1}$$
Teplotu T_2 určíme pomocí Charlesova zákona:
$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}, \ \frac{p_3}{T_3} = \frac{p_4}{T_4};$$
protože $p_2 = p_3$, $p_1 = p_4$ a $T_2 = T_4$, po úpravě dostaneme
$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_2}{T_3},$$
Odtud
$$T_2 = \sqrt{T_1 T_3} = 2T_1.$$
3 body

Dosazením do vztahu (1)
$$Q = \frac{5}{2} nR (T_2 - T_1) + \frac{7}{2} nR (T_3 - T_2) = \frac{19}{2} nRT_1.$$
V cyklu 2-3-4-A-B-C-2 plyn přijímá teplo Q_1 na úsecích C-2, 2-3 a A-B. Je zřejmé, že
$$Q_1 = Q - Q_{1C} + Q_{AB} = Q - \frac{5}{2} nR (T_C - T_1) + \frac{5}{2} nR (T_B - T_A). \tag{2}$$
Nyní potřebujeme vyjádřit teploty T_A, T_B a T_C pomocí T_1. V cyklu 1-C-B-A leží body 1 a B na přímce procházející počátkem. Bude tedy platit, že $p_1 V_B = p_B V_1$. Protože $V_B = V_A$ a $p_B = p_C$, získáme rovnici $p_1 V_A = p_C V_1$, což je Boyleův-Mariottův zákon a platí, že $T_A = T_C$ (body A a C leží na stejné izotermě). Protože $T_B = T_2 = 2T_1$, můžeme napsat
$$T_A = T_C = \sqrt{T_1 T_B} = T_1 \sqrt{2}.$$
4 body

Dosazením do vztahu (2) :
$$Q_1 = Q - \frac{5}{2} nRT_1 \left(\sqrt{2} - 1\right) + \frac{5}{2} nRT_1 \left(2 - \sqrt{2}\right) =$$
$$= \frac{19}{2} nRT_1 - \frac{5}{2} nRT_1 \left(\sqrt{2} - 1\right) + \frac{5}{2} nRT_1 \left(2 - \sqrt{2}\right) =$$
$$= nRT_1 \left(17 - 5\sqrt{2}\right) = \frac{2}{19} Q \left(17 - 5\sqrt{2}\right) = 1{,}05\, Q.$$
Číselně $T_2 = T_4 = T_B = 600$ K, $T_A = T_C = 424$ K, $Q_1 = 26$ kJ. **3 body**