Řešení úloh krajského kola 64. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie C

Úlohy navrhli R. Horáková (1, 3, 4) a T. Vlasák (2)

1. a) Pro změny vnitřní energie v jednotlivých fázích cyklu platí

1 – 2: $\Delta U_1 = -W_1 + Q_{p_1}$

2 – 3: $\Delta U_2 = -W_2$

3 – 4: $\Delta U_3 = W_3 - Q_{p_2}$

4 – 1: $\Delta U_4 = W_4$ **2 body**

b) Pro dodané teplo platí

$$Q_{p_1} = nC_p(T_2 - T_1) = 7nR\frac{T_2 - T_1}{2} = 7p_1\frac{V_2 - V_1}{2}.$$

Pro odebrané teplo platí

$$Q_{p_2} = nC_p(T_3 - T_4) = 7nR\frac{T_3 - T_4}{2} = 7p_2\frac{V_3 - V_4}{2}.$$ **1 bod**

c) Účinnost děje bude

$$\eta = \frac{W}{Q_{p_1}} = \frac{Q_{p_1} - Q_{p_2}}{Q_{p_1}} = 1 - \frac{Q_{p_2}}{Q_{p_1}} = 1 - \frac{V_3 - V_4}{V_2 - V_1} \cdot \frac{p_2}{p_1}$$

1 bod

d) Z Poissonových zákonů pro adiabatické děje

$$p_1V_1^{\kappa} = p_2V_4^{\kappa} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{V}_4 = V_1\sqrt[\kappa]{\frac{p_1}{p_2}},$$ **1 bod**

$$p_1V_2^{\kappa} = p_2V_3^{\kappa} \quad \Rightarrow \quad V_3 = V_2\sqrt[\kappa]{\frac{p_1}{p_2}}.$$ **1 bod**

Po dosazení za V_3 a V_4 do vztahu pro účinnost dostaneme:

$$\eta = 1 - \sqrt[\kappa]{\frac{p_1}{p_2}} \cdot \frac{V_2 - V_1}{V_2 - V_1} \cdot \frac{p_2}{p_1} = 1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}$$

3 body

Číselně $\eta = 0{,}48$. **1 bod**

2. a) Každý atom titanu ve vrcholech je sdílen 8 sousedními buňkami, devátý atom připadá celý na danou buňku, čili na jednu buňku připadá $\frac{1}{8} \cdot 8 + 1 = 2$ atomy titanu.

Čtyři atomy kyslíku jsou sdíleny dvěma buňkami, dva další připadají celé na danou buňku, takže na jednu buňku připadají $\frac{1}{2} \cdot 4 + 2 = 4$ atomy kyslíku.

2 body

b) Počet základních buněk N lze vyjádřit jako poměr hmotnosti vzorku a hmotnosti jedné základní buňky. Hmotnost základní buňky si určíme jako součet členů obsahujících násobek počtu atomů daného typu připadajících na jednu buňku a hmotnosti jednoho atomu daného typu: $2A_{r,\mathrm{Ti}} \cdot m_u + 4A_{r,\mathrm{O}} \cdot m_u$. Počet základních buněk tedy je

$$N = \frac{m}{2A_{r,\mathrm{Ti}} \cdot m_u + 4A_{r,\mathrm{O}} \cdot m_u} = 3{,}77 \cdot 10^{22}.$$ **3 body**

c) Hustotu určíme jako podíl hmotnosti základní buňky a objemu jedné základní buňky a^2c:

$$\rho = \frac{2A_{r,\mathrm{Ti}} \cdot m_u + 4A_{r,\mathrm{O}} \cdot m_u}{a^2c} = 6\,603\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}.$$ **2 body**

d) Nové mřížkové parametry po zahřátí budou dány vztahy $(1 + p_a)\,a$ a $(1 + p_c)\,c$, kde $p_a = 0{,}016\,3$ a $p_c = 0{,}012\,5$. Vzhledem k tomu, že hustota je nepřímo úměrná objemu základní buňky a hmotnost základní buňky se nezmění, hustota se sníží o

$$p_\rho = \frac{\rho - \rho'}{\rho} = \frac{\dfrac{1}{a^2c} - \dfrac{1}{[(1+p_a)\,a]^2\,(1+p_c)\,c}}{\dfrac{1}{a^2c}} = 1 - \frac{a^2c}{[(1+p_a)\,a]^2\,(1+p_c)\,c} =$$

$$= 1 - \frac{1}{(1+p_a)^2\,(1+p_c)} = 0{,}043\,8 = 4{,}38\%.$$

3 body

Alternativní řešení části d):

$$\rho' = \frac{m}{V'} = \frac{m}{a'^2c'} = \frac{m}{(1{,}0163a)^2 1{,}0125c} = \frac{m}{1{,}0458a^2c} = 0{,}9562\rho.$$

$$\Delta\rho = \rho' - \rho = 0{,}9562\rho - \rho = -0{,}0438\rho.$$

Hustota poklesla o 4,38%.

3 body

Alternativní řešení části d) pomocí relativních odchylek:

$$\delta\rho = \delta m + \delta V = 0 + 2\delta a + \delta c = 2 \cdot 1{,}63\% + 1{,}25\% = 4{,}51\%.$$

Metoda je pouze přibližná a výsledek na 3 platné cifry se liší od přesných výpočtů uvedených výše.

2 body

3. a) Tahová síla v krajních lanech je $F_1 = S_1E_1\varepsilon$, v prostředním laně $F_2 = S_1E_2\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Po dosazení za $\varepsilon S_1 = \dfrac{F_1}{E_1}$ je $F_2 = \dfrac{F_1E_2}{2E_1}$. **1 bod**

Musí platit

$$2F_1 + F_2 = F_G.$$

Po dosazení a úpravě

$$2F_1 + \frac{F_1E_2}{2E_1} = mg \quad \Rightarrow \quad F_1\left(2 + \frac{E_2}{2E_1}\right) = mg,$$ **1 bod**

$$F_1 = \frac{2mgE_1}{4E_1 + E_2} = 5{,}54 \cdot 10^3 \text{ N},$$ **1 bod**

$$F_2 = \frac{mgE_2}{4E_1 + E_2} = 4{,}62 \cdot 10^3 \text{ N}.$$ **1 bod**

b) Vzhledem k tomu, že relativní prodloužení všech lan je stejné, platí

$$\sigma_{n,\mathrm{Cu}} = E_1\varepsilon,\ \sigma_{n,\mathrm{O}} = E_2\varepsilon.$$

Potom

$$\frac{\sigma_{n,\mathrm{Cu}}}{\sigma_{n,\mathrm{O}}} = \frac{E_1}{E_2} = 0{,}6.$$ **2 body**

c) Na každé lano působí tahová síla $F = \frac{mg}{3}$, normálové napětí je

$$\sigma_n = \frac{F}{S} = \frac{mg}{3S}.$$

Pro relativní prodloužení platí

$$\varepsilon = \frac{\sigma_n}{E_2} = \frac{mg}{3SE_2}.$$

Číselně $\varepsilon = 3{,}35 \cdot 10^{-4}$. Tedy $\varepsilon = 0{,}033\,5$ %, což je v mezích pružné deformace.
2 body

d) Normálové napětí se bude rovnat mezi pevnosti

$$\sigma_p = \frac{F}{S} = \frac{mg}{3S}.$$

Potom pro hmotnost nosníku platí

$$m = \frac{3S\sigma_p}{g} = 3{,}10 \cdot 10^4 \text{ kg}.$$

Hmotnost nosníku by musela být asi 31 tun, aby normálové napětí v daných ocelových lanech dosáhlo hodnoty meze pevnosti. **2 body**

4. a) Bernoulliho rovnice má tvar. $\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \Delta p = \frac{1}{2}\rho v_2^2$. Na základě rovnice kontinuity vyjádříme rychlost v_1 vody v širší trubici: $v_1 = v_2 \cdot \frac{S_2}{S_1}$. Pak

$$\frac{1}{2}\frac{v_2^2 S_2^2}{S_1^2}\rho + \Delta p = \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$ **1 bod**

Po úpravě

$$v_2 = r_1^2 \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho(r_1^4 - r_2^4)}},$$ **2 body**

číselně $v_2 = 24{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. **1 bod**

b) V tomto případě má Bernoulliova rovnice tvar $\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \Delta p = \frac{1}{2}\rho {v'}_2^2 + \rho g h'$.
1 bod

Potom

$$v_2' = r_1^2 \sqrt{\frac{2(\Delta p - \rho g h')}{\rho(r_1^4 - r_2^4)}} = 17{,}5 \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$ **2 body**

c) V obou případech se voda pohybuje jako při vodorovném vrhu. Doba pohybu v případě a) bude $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, v případě b) $t_2 = \sqrt{\frac{2(h+h')}{g}}$. **1 bod**

Voda dostříkne do vzdálenosti:

$$s_1 = v_2 t_1 = r_1^2 \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho(r_1^4 - r_2^4)}} \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

$$s_2 = v_2' t_2 = r_1^2 \sqrt{\frac{2(\Delta p - \rho g h')}{\rho(r_1^4 - r_2^4)}} \sqrt{\frac{2(h+h')}{g}}.$$

1 bod

Číselně: $s_1 = 15{,}6$ m, $s_2 = 32{,}6$ m **1 bod**