Řešení úloh 1. kola 64. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*
Autor úloh: J. Jírů

1.a) Pomocí drah $s_1 = 1\,100$ m, $s_2 = 400$ m a odpovídajících průměrných rychlostí v_{p1}, v_{p2} určíme celkový čas běhu každého závodníka:

$$t = \frac{s_1}{v_{\mathrm{p1}}} + \frac{s_2}{v_{\mathrm{p2}}}.$$

Závodník Tempík:

$$t_{\mathrm{T}} = \left(\frac{1\,100}{6{,}00} + \frac{400}{6{,}13}\right)\mathrm{s} = 248{,}6\ \mathrm{s}.$$

Závodník Rychlý:

$$t_{\mathrm{R}} = \left(\frac{1\,100}{5{,}82} + \frac{400}{6{,}61}\right)\mathrm{s} = 249{,}5\ \mathrm{s}.$$

Jelikož $t_{\mathrm{T}} < t_{\mathrm{R}}$, cílem dříve proběhl závodník Tempík. **4 body**

b) Časový náskok je roven rozdílu mezičasů závodníků při vbíhání do posledního kola:

$$\Delta t = \frac{s_1}{v_{\mathrm{p1}}(\mathrm{R})} - \frac{s_1}{v_{\mathrm{p1}}(\mathrm{T})} = \frac{1\,100}{5{,}82}\mathrm{s} - \frac{1\,100}{6{,}00}\mathrm{s} = 5{,}67\ \mathrm{s}.$$

2 body

c) Český rekord v běhu na 400 m (Pavel Maslák, 2014, Dauhá): 44,79 s. Český rekord v běhu na 1 500 m (Jakub Holuša, 2018, Monako): 3:32,49 min = 212,49 s. Průměrné rychlosti při dosažených rekordních časech jsou:

$$v_{\mathrm{p}}\,(400) = \frac{400}{44{,}79}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 8{,}93\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

$$v_{\mathrm{p}}\,(1\,500) = \frac{1\,500}{212{,}49}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 7{,}06\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Pavel Maslák měl průměrný čas na jedno kolo 44,79 s, Jakub Holuša $\frac{4}{15}\cdot 212{,}49\ \mathrm{s} =$ $= 56{,}66$ s. **4 body**

2.a) Označme s dráhu vybrané sedačky při jedné otáčce a a velikost jejího stálého tečného zrychlení během roztáčení kolotoče. Pak platí

$$s = \frac{1}{2}aT_1^2, \qquad (1)$$

$$3s = \frac{1}{2}at_3^2. \qquad (2)$$

Vydělíme jednu rovnici druhou a po úpravě dostaneme

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}t_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}t_3 = 0{,}577t_3 = 13{,}9\ \mathrm{s}.$$ **3 body**

Označme t_2 dobu prvních dvou otáček, pak platí

$$2s = \frac{1}{2}at_2^2. \qquad (3)$$

Z rovnic (2) a (3) plyne

$$t_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}t_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}t_3.$$

Doba druhé otáčky pak je

$$T_2 = t_2 - T_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}t_3 - \frac{1}{\sqrt{3}}t_3 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}t_3 = 0{,}239t_3 = 5{,}7\ \mathrm{s}.$$ **3 body**

Doba třetí otáčky je

$$T_3 = t_3 - t_2 = t_3 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}t_3 = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)t_3 = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}t_3 = 0{,}184t_3 = 4{,}4\ \mathrm{s}.$$

2 body

b) Z rovnice (2) plyne:

$$s = \frac{1}{6}at_3^2.$$

Označíme-li v konečnou obvodovou rychlost sedačky, dostaneme:

$$T = \frac{s}{v} = \frac{\frac{1}{6}at_3^2}{at_3} = \frac{t_3}{6} = 4{,}0\ \mathrm{s}.$$ **2 body**

3. a) Na rychlík o hmotnosti m působí stálá brzdící síla $F_1 = kmg$ a vyvolá jeho zpomalený pohyb se zrychlením o velikosti

$$a_1 = \frac{F_1}{m} = \frac{kmg}{m} = kg.$$

Doba brzdění:

$$t_1 = \frac{v_0}{a_1} = \frac{v_0}{kg} = \frac{40}{0{,}075 \cdot 9{,}81}\ \mathrm{s} = 54\ \mathrm{s}.$$

Brzdná dráha:

$$s_1 = \frac{1}{2}a_1t_1^2 = \frac{1}{2}a_1\left(\frac{v_0}{a_1}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2a_1} = \frac{v_0^2}{2kg} = \frac{40^2}{2 \cdot 0{,}075 \cdot 9{,}81}\mathrm{s} = 1\,090\ \mathrm{m}.$$

4 body

b) Použijeme odvozený vztah pro dráhu:

$$s_2 = \frac{v_0^2}{2a_2}.$$

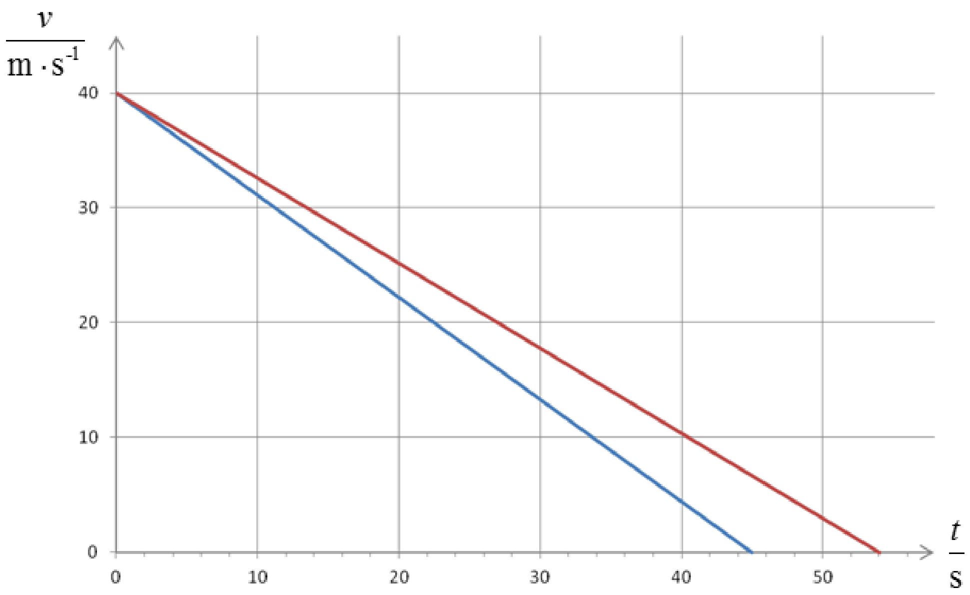
Ze vztahu plyne

$$a_2 = \frac{v_0^2}{2s_2} = \frac{40^2}{2 \cdot 900}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 0{,}89\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

Doba brzdění:

$$t_2 = \frac{v_0}{a_2} = \frac{v_0}{\frac{v_0^2}{2s_2}} = \frac{2s_2}{v_0} = \frac{2 \cdot 900}{40}\ \mathrm{s} = 45\ \mathrm{s}.$$ **4 body**

c) Dráhy ověříme výpočtem obsahu plochy pod grafem.



Obr. R1

$$s_1 = \frac{40 \cdot 54}{2}\ \mathrm{m} = 1\,080\ \mathrm{m},$$
$$s_2 = \frac{40 \cdot 45}{2}\ \mathrm{m} = 900\ \mathrm{m}.$$

Hodnoty dráhy získané z grafu souhlasí, mírný rozdíl v a) lze zdůvodnit zaokrouhlením konečných výsledků. **2 body**

4. a) Vagón je inerciální vztažnou soustavou, na kuličku nepůsobí žádná setrvačná síla, proto kulička dopadne na stejné místo jako ve vagónu v klidu. **1 bod**

b) Kulička z hlediska pozorovatele ve vagónu koná současně dva pohyby, ve svislém směru volný pád a ve vodorovném směru rovnoměrně zrychlený pohyb způsobený setrvačnou silou. Doba volného pádu kuličky je

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Za tutéž dobu t se kulička posune ve směru pohybu vagónu o vzdálenost

$$d_1 = \frac{1}{2}a_1t^2 = \frac{1}{2}a_1 \cdot \frac{2h}{g} = \frac{a_1}{g}h = \frac{0{,}60}{9{,}81} \cdot 2{,}30\ \mathrm{m} = 0{,}14\ \mathrm{m}.$$

Kulička dopadne ve vzdálenosti 0,14 m od původního místa dopadu ve směru pohybu vlaku. **3 body**

c) Při rozjíždění se vlivem setrvačné síly posune místo dopadu proti směru pohybu vagónu o vzdálenost

$$d_2 = \frac{a_2}{g}h = \frac{0{,}45}{9{,}81} \cdot 2{,}30\ \mathrm{m} = 0{,}11\ \mathrm{m}.$$

1 bod

d) Při průjezdu zatáčkou setrvačná odstředivá síla vychýlí kuličku v radiálním směru od středu zatáčky o vzdálenost

$$d_3 = \frac{a_d}{g} h,$$

kde $a_d = \dfrac{v^2}{r}$ je velikost dostředivého zrychlení. Dosazením dostaneme

$$d_3 = \frac{v^2 h}{gr} = \frac{20^2 \cdot 2{,}30}{9{,}81 \cdot 500}\ \mathrm{m} = 0{,}19\ \mathrm{m}.$$ **3 body**

e) Místo dopadu se posune o vzdálenost d_1 ve směru pohybu vlaku a současně o vzdálenost d_3 radiálně od středu zatáčky. Celková velikost posunutí místa dopadu je

$$d_4 = \sqrt{d_1^2 + d_3^2} = \sqrt{0{,}14^2 + 0{,}19^2}\ \mathrm{m} = 0{,}24\ \mathrm{m}.$$ **2 body**

5.a) Vozík na kolečkách se pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem, ze vztahu pro dráhu určíme velikost jeho zrychlení:

$$s = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{2s}{t_1^2}.$$

Označme m hmotnost vozíku. Velikost jeho zrychlení je podle 2. Newtonova pohybového zákona

$$a_1 = \frac{mg \sin \alpha}{m} = g \sin \alpha.$$

Z rovnic plyne

$$\sin \alpha = \frac{a_1}{g} = \frac{2s}{g t_1^2} = \frac{2 \cdot 1{,}75}{9{,}81 \cdot 1^2} = 0{,}357 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 21^\circ.$$ **3 body**

b) Pro velikost zrychlení vozíku s kolečky vzhůru platí

$$a_2 = \frac{2s}{t_2^2},$$

$$a_2 = \frac{mg \sin \alpha - f mg \cos \alpha}{m} = g\left(\sin \alpha - f \cos \alpha\right).$$

Z rovnic plyne

$$f = \frac{\sin \alpha - \dfrac{a_2}{g}}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha - \dfrac{2s}{g t_2^2}}{\cos \alpha} = \frac{\sin 21^\circ - \dfrac{2 \cdot 1{,}75}{9{,}81 \cdot 2^2}}{\cos 21^\circ} = 0{,}29.$$ **3 body**

c) Soustava obou vozíků se pohybuje se zrychlením o velikosti

$$a_3 = \frac{2mg \sin \alpha - f mg \cos \alpha}{2m} = g\left(\sin \alpha - \frac{f}{2} \cos \alpha\right).$$

Pro čas platí

$$s = \frac{1}{2} a_3 t_3^2 \quad \Rightarrow \quad t_3 = \sqrt{\frac{2s}{a_3}}.$$

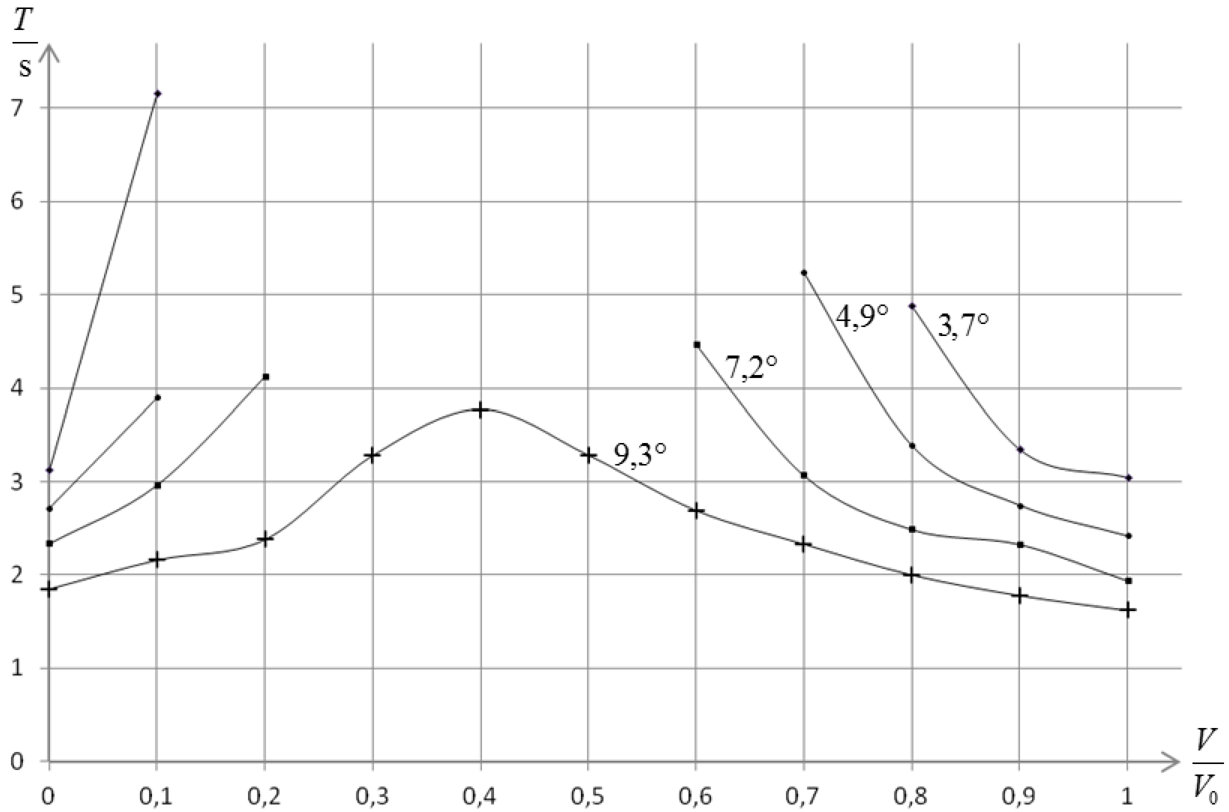
Dosazením dostaneme

$$t_3 = \sqrt{\frac{2s}{a_3}} = \sqrt{\frac{2s}{g\left(\sin\alpha - \frac{f}{2}\cos\alpha\right)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}75}{9{,}81\left(\sin 21^\circ - \frac{0{,}29}{2}\cos 21^\circ\right)}} = 1{,}3\ \mathrm{s}.$$

4 body

6. Jako nakloněná rovina byla použita školní trojmístná lavice délky $l = 210$ cm. Jejím podkládáním byly nastaveny různé výšky protilehlých bočních hran lavice měřené od vodorovné podlahy. Jejich výškový rozdíl Δh pak určuje úhel sklonu, pro nějž platí $\sin\alpha = \dfrac{\Delta h}{l}$.

Funkční závislost byla změřena pro 4 úhly, výsledky jsou v grafu.



Obr. R2

7 bodů

Závěr: Ve všech případech doba pohybu s rostoucím objemem náplně nejprve roste, poté klesá. Prodlužování doby je způsobeno přesypáváním rýže na vnitřním plášti nádoby, kdy část původní potenciální energie se přemění na vnitřní energii. Při menších sklonech se sklenice pro středně velké náplně ani neuvede do pohybu.

Při větších objemech s rostoucím objemem přesypávání zaniká, rýže spíše po vnitřním plášti klouže a po dosažení větší rychlosti pozorujeme dokonce téměř souměrné přitlačení rýže k plášti, čímž v blízkém okolí rotační osy vzniká dutina. **3 body**

7.a) V nejnižší poloze kulička přechází z kruhové trajektorie o poloměru l na kruhovou trajektorii o menším poloměru r_1. Velikost rychlosti v_1 je v této poloze maximální a získáme ji ze zákona zachování mechanické energie

$$mgl = \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Z rovnice plyne

$$v_1^2 = 2gl. \tag{1}$$

V této nejnižší poloze má setrvačná odstředivá síla a tíhová síla působící na kuličku stejný směr svisle dolů. V okamžiku přechodu kuličky na trajektorii o poloměru r_1 je nit napínána silou o velikosti

$$F = \frac{mv_1^2}{r_1} + mg.$$

Mezní podmínka pro nepřetržení nitě nastane pro $r_1 = l - h_1$ a $F = 8mg$. Dosazením dostaneme

$$8mg = \frac{mv_1^2}{l - h_1} + mg,$$

neboli

$$7g\,(l - h_1) = v_1^2.$$

Dosazením vztahu (1) nakonec dostaneme

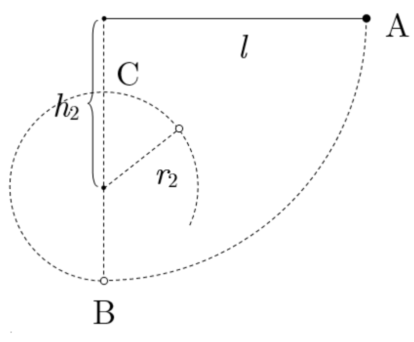
$$h_1 = \frac{5}{7}l.$$ **4 body**

b) Aby kulička prošla nejvyšší polohou C kruhové trajektorie (obr. R3), musí velikost setrvačné odstředivé síly v bodě C dosáhnout aspoň velikosti tíhové síly, tj. musí být splněna podmínka

$$\frac{mv_2^2}{r_2} = mg,$$

kde v_2 je velikost rychlosti kuličky v poloze C a r_2 poloměr kruhové trajektorie. Z rovnice plyne

$$v_2^2 = gr_2. \tag{2}$$



Obr. 3

Podle zákona zachování mechanické energie je kinetická energie kuličky v poloze C rovna úbytku potenciální energie při přemístění kuličky z polohy A do polohy C:

$$mg\,(l - 2r_2) = \frac{1}{2}mv_2^2. \tag{3}$$

Ze vztahů (2) a (3) plyne

$$r_2 = \frac{2}{5}l. \tag{4}$$

Hledaná hloubka je $h_2 = l - r_2 = \dfrac{3}{5}l.$ **4 body**

c) Nit je napínána maximální silou bezprostředně po průchodu bodem B, její velikost je

$$F_2 = mg + \frac{mv_1^2}{r_2}.$$

Užitím vztahů (1) a (4) dostaneme

$$F_2 = mg + \frac{m \cdot 2gl}{\frac{2}{5}l} = 6mg.$$

4 body