Řešení úloh krajského kola 64. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie D

Úlohy navrhl J. Jírů

1. a) Petr Pracovitý by musel sám vystoupat a vynést celý řetěz až na balkón, vykonal by práci

$$W_\mathrm{P} = (m_0 + m)gh = (65 + 16) \cdot 10 \cdot 12\ \mathrm{J} = 9{,}7\ \mathrm{kJ}.$$

Jan Chytrý by též vystoupal až na balkón, ale vytáhl by pouze část řetězu s těžištěm v poloviční výšce balkónu. Vykonal by práci

$$W_\mathrm{Ch} = m_0gh + \frac{h}{l}m\cdot g\cdot\frac{h}{2} = \left(m_0 + \frac{h}{2l}m\right)gh = \left(65 + \frac{12}{2\cdot 20}\cdot 16\right)\cdot 10\cdot 12\ \mathrm{J} = 8{,}4\ \mathrm{kJ}.$$

4 body

b) Petr nese celý řetěz, působí na něj silou

$$F_\mathrm{P} = mg = 16 \cdot 10\ \mathrm{N} = 160\ \mathrm{N}.$$

Jan působí na řetěz maximální silou až při zavěšování:

$$F_\mathrm{Ch} = \frac{h}{l}mg = \frac{12}{20}\cdot 16\cdot 10\ \mathrm{N} = 96\ \mathrm{N}.$$

4 body

c) Všechny články padají volným pádem bez vzájemného působení. Z rovnic pro volný pád posledního článku

$$h = \frac{1}{2}gt^2,\ \ v = gt$$

vyloučením času dostaneme

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 12}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 15\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

2 body

2. a) Z 2. Newtonova pohybového zákona plyne

$$F = ma = m\frac{v_1 - v_2}{t} = 1600\frac{32{,}5 - 17{,}5}{20}\ \mathrm{N} = 1\,200\ \mathrm{N}.$$

2 body

Konstantní brzdící síla způsobí rovnoměrně zpomalený pohyb, jeho dráha je

$$s = v_1t - \frac{1}{2}at^2 = v_1t - \frac{1}{2}\frac{v_1 - v_2}{t}t^2 = \frac{v_1 + v_2}{2}t = \frac{32{,}5 + 17{,}5}{2}\cdot\ 20\mathrm{m} = 500\ \mathrm{m}.$$

(K obecnému řešení lze dospět i přímo vztahem $s = v_pt$, v němž průměrná rychlost v_p rovnoměrně zpomaleného pohybu je aritmetický průměr počáteční a konečné rychlosti.) **2 body**

b) Brzdící síla F' vykonala práci, která je rovna úbytku kinetické energie:

$$W = F's' = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2.$$

Úpravou dostaneme

$$F' = \frac{W}{s'} = \frac{m\left(v_1^2 - v_2^2\right)}{2s'} = \frac{1600 \cdot \left(32{,}5^2 - 17{,}5^2\right)}{2 \cdot 300}\ \mathrm{N} = 2\,000\ \mathrm{N}.$$

2 body

Úpravou výsledného vztahu v a) pro dráhu dostaneme dobu brzdění:

$$t' = \frac{2s'}{v_1 + v_2} = \frac{2 \cdot 300}{32{,}5 + 17{,}5}\ \mathrm{s} = 12\ \mathrm{s}.$$

2 body

c) Doba váhání je doba, která při rychlosti v_1 uběhla mezi rozhodnutím odbočit v prvním a druhém případě:

$$T = \frac{s - s'}{v_1} = \frac{\frac{v_1 + v_2}{2} t - s'}{v_1} = \frac{(v_1 + v_2)\, t - 2s'}{2v_1} =$$

$$= \frac{(32{,}5 + 17{,}5) \cdot 20 - 2 \cdot 300}{2 \cdot 32{,}5}\ \mathrm{s} = 6{,}2\ \mathrm{s}.$$

2 body

3. a) Vozík se pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením

$$a_1 = \frac{mg \sin\alpha}{m} = g \sin\alpha.$$

Ze vztahu pro dráhu vyjádříme čas

$$l = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2l}{a_1}}$$

a dosadíme do vztahu pro rychlost:

$$v_1 = a_1 t_1 = a_1 \sqrt{\frac{2l}{a_1}} = \sqrt{2a_1 l} = \sqrt{2gl \sin\alpha} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}3 \cdot \sin 14^\circ}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 3{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

3 body

b) Tentokrát na soustavu působí ve směru pohybu složka tíhové síly obou těles a proti směru pohybu třecí síla mezi kvádrem a nakloněnou rovinou. Soustava vozíku s kvádrem o celkové hmotnosti $2m$ se pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením

$$a_2 = \frac{2mg \sin\alpha - fmg \cos\alpha}{2m} = g\left(\sin\alpha - 0{,}5f \cos\alpha\right).$$

Konečná rychlost podle a) pak je

$$v_2 = \sqrt{2a_2 l} = \sqrt{2gl\left(\sin\alpha - 0{,}5f \cos\alpha\right)} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}3 \cdot (\sin 14^\circ - 0{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot \cos 14^\circ)}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 2{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

3 body

c) Energie způsobující zahřátí třecích ploch je rovna práci vykonané třecí silou:

$$E = W = F_{\mathrm{t}} l = fmgl \cos\alpha = 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}3 \cdot \cos 14^\circ\ \mathrm{J} = 5{,}3\ \mathrm{J}.$$

2 body

d) Z rovnosti složky tíhové síly soustavy vozíku s kvádrem ve směru nakloněné roviny a třecí síly

$$(m + m')\, g \sin\alpha = f m' g \cos\alpha$$

plyne

$$m' = \frac{\sin\alpha}{f\cos\alpha - \sin\alpha} m = \frac{\sin 14^\circ}{0{,}3 \cdot \cos 14^\circ - \sin 14^\circ} \cdot 0{,}8\ \text{kg} = 3{,}9\ \text{kg}.$$

2 body

4. a) Označme m hmotnost cyklisty s kolem. Pro bezpečné projetí nesmí velikost setrvačné odstředivé síly $F_\text{s} = \frac{mv^2}{r}$ působící v soustavě cyklisty na cyklistu s kolem překročit velikost třecí síly $F_\text{t} = fmg$ mezi kolem a vozovkou. Z poměru sil při rychlosti v_1

$$\frac{F_\text{s}}{F_\text{t}} = \frac{v_1^2}{fgr} = \frac{7^2}{0{,}55 \cdot 9{,}81 \cdot 17} = 0{,}53 < 1$$

plyne

$$F_\text{s} < F_\text{t},$$

tedy třecí síla je dostatečná k tomu, aby cyklista Opatrný projel zatáčkou bezpečně.

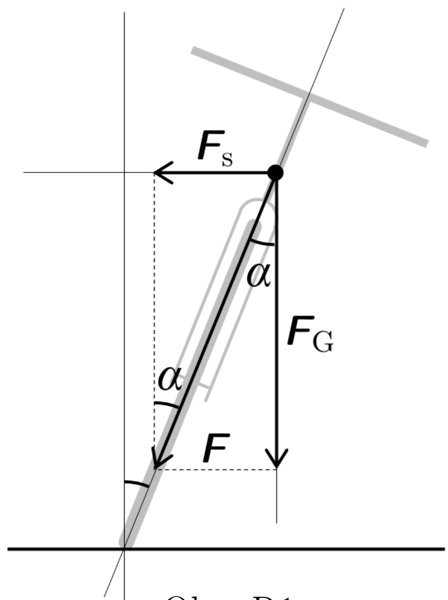
2 body

b) V soustavě spojené s cyklistou působí v těžišti soustavy cyklisty s kolem tíhová síla $\boldsymbol{F}_\text{G}$ a setrvačná odstředivá síla $\boldsymbol{F}_\text{s}$ tak, že vektorová přímka jejich výslednice $\boldsymbol{F}$ protíná vodorovnou vozovku ve spojnici dotykových bodů kol s vozovkou. Pro úhel α odklonu cyklisty od svislého směru platí

$$\text{tg}\alpha = \frac{F_\text{s}}{F_\text{G}} = \frac{\frac{mv_1^2}{r}}{mg} = \frac{v_1^2}{gr} =$$

$$= \frac{7^2}{9,81 \cdot 17} = 0{,}294 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 16^\circ.$$

2 body



Obr. R1

c) Maximální možnou rychlost průjezdu zatáčkou určíme z rovnosti odpovídající setrvačné odstředivé síly a třecí síly

$$\frac{mv_\text{max}^2}{r} = fmg,$$

z níž plyne

$$v_\text{max} = \sqrt{fgr} = \sqrt{0{,}55 \cdot 9{,}81 \cdot 17}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 9{,}6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 body

d) Určíme rychlost v_2, kterou cyklista Rychlý vjíždí do zatáčky. Rychlý má v místě startu Opatrného stejnou velikost rychlosti, jakou by měl při vjezdu do zatáčky, kdyby se rozjížděl z klidu z místa startu Opatrného. Proto je jeho kinetická energie při vjezdu do zatáčky součtem kinetické energie v místě startu cyklisty Opatrného a stejně velké energie, kterou získá z následného sjetí s kopce:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Z rovnice plyne

$$v_2 = \sqrt{2}v_1 = 9{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Jelikož $v_2 > v_{\max}$, nemůže cyklista Rychlý projet zatáčkou bezpečně bez smyku.

2 body

e) Z rovnosti sil pro rychlost v_2

$$\frac{mv_2^2}{r} = f_{\min}mg$$

plyne

$$f_{\min} = \frac{v_2^2}{gr} = \frac{2v_1^2}{gr} = \frac{2 \cdot 7^2}{9{,}81 \cdot 17} = 0{,}59.$$

2 body