Řešení úloh okresního kola 64. ročníku Fyzikální olympiády ve školním roce 2022/2023

Kategorie E

FO64E2-1: Lyžařské závody *I. Volf*

a) Pro společné stoupání o déle s_1 ke křížku dostáváme

$$s_1 = 2\,400\,\mathrm{m},\ t_1 = 20\,\mathrm{min} = 1\,200\,\mathrm{s},\ v_1 = \frac{s_1}{t_1} = \frac{2\,400\,\mathrm{m}}{1\,200\,\mathrm{s}} = 2{,}0\,\mathrm{m/s} = 7{,}2\,\mathrm{km/h}.$$

Pro Ilonu na vodorovném úseku s_2 trati dívek vychází

$$s_2 = 3\,600\,\mathrm{m},\ t_2 = 15\,\mathrm{min} = 900\,\mathrm{s},\ v_2 = \frac{s_2}{t_2} = \frac{3\,600\,\mathrm{m}}{900\,\mathrm{s}} = 4{,}0\,\mathrm{m/s} \doteq 14\,\mathrm{km/h},$$

pro Karla na vodorovném úseku s_3 trati chlapců

$$s_3 = 5\,400\,\mathrm{m},\ t_3 = 18\,\mathrm{min} = 1\,080\,\mathrm{s},\ v_3 = \frac{s_3}{t_3} = \frac{5\,400\,\mathrm{m}}{1\,080\,\mathrm{s}} = 5{,}0\,\mathrm{m/s} = 18\,\mathrm{km/h}.$$

Pro společné klesání o délce s_4 od krmelce do cíle dostáváme

$$s_4 = 1\,800\,\mathrm{m},\ t_4 = 4\,\mathrm{min} = 240\,\mathrm{s},\ v_4 = \frac{s_4}{t_4} = \frac{1\,800\,\mathrm{m}}{240\,\mathrm{s}} = 7{,}5\,\mathrm{m/s} = 27\,\mathrm{km/h}.$$

Pro Ilonu vychází průměrná rychlost

$$v_{\mathrm{p1}} = \frac{s_1 + s_2 + s_4}{t_1 + t_2 + t_4} = \frac{2\,400\,\mathrm{m} + 3\,600\,\mathrm{m} + 1\,800\,\mathrm{m}}{1\,200\,\mathrm{s} + 900\,\mathrm{s} + 240\,\mathrm{s}} \doteq 3{,}333\,3\,\mathrm{m/s} \doteq 3{,}3\,\mathrm{m/s}, \quad (= 12\,\mathrm{km/h})$$

pro Karla

$$v_{\mathrm{p2}} = \frac{s_1 + s_3 + s_4}{t_1 + t_3 + t_4} = \frac{2\,400\,\mathrm{m} + 5\,400\,\mathrm{m} + 1\,800\,\mathrm{m}}{1\,200\,\mathrm{s} + 1\,080\,\mathrm{s} + 240\,\mathrm{s}} \doteq 3{,}809\,5\,\mathrm{m/s} \doteq 3{,}8\,\mathrm{m/s}, \quad (\doteq 14\,\mathrm{km/h}).$$

4 body

b) Karel doběhl za $t_\mathrm{k} = t_1 + t_3 + t_4 = 20\,\mathrm{min} + 18\,\mathrm{min} + 4\,\mathrm{min} = 42\,\mathrm{min}$, Ilona vyběhla o 2 minuty později a na trati strávila $t_\mathrm{i} = t_1 + t_2 + t_4 = 20\,\mathrm{min} + 15\,\mathrm{min} + 4\,\mathrm{min} = 39\,\mathrm{min}$, doběhla tak za 41 min od doby, kdy startoval Karel, tj. o 1 min dříve než Karel. **2 body**

c) Příklad grafu je na obr. 1. **2 body**

d) Pavel vyběhl 4 minuty po Karlovi, na vodorovný úsek měl tedy jen $t'_3 = 18\,\mathrm{min} - 4\,\mathrm{min} = 14\,\mathrm{min} = 840\,\mathrm{s}$. Jeho rychlost na vodorovném úseku byla

$$v_{3\mathrm{P}} = \frac{s_3}{t'_3} = \frac{5\,400\,\mathrm{m}}{840\,\mathrm{s}} \doteq 6{,}428\,6\,\mathrm{m/s} \doteq 6{,}4\,\mathrm{m/s}. \quad (\doteq 23\,\mathrm{km/h})$$

2 body

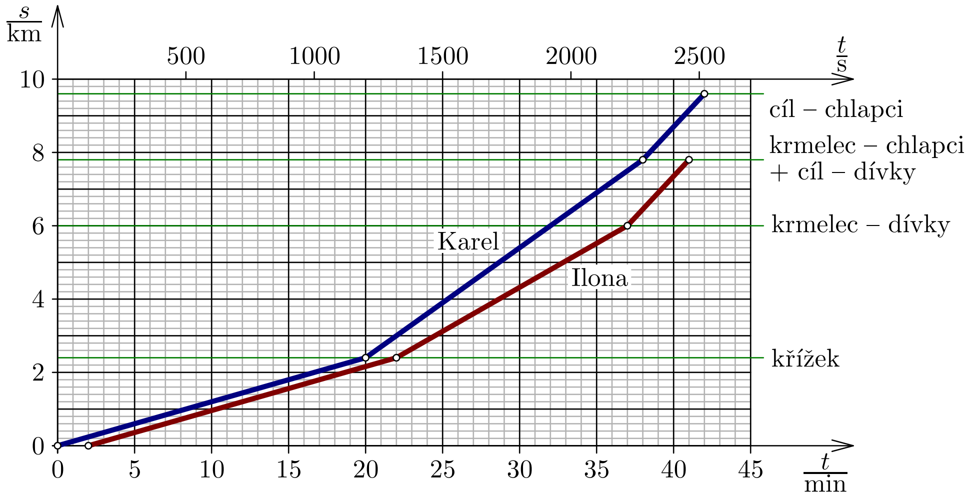
FO64E2-2: Vytápění místnosti *I. Volf*

a) Hmotnost vzduchu určíme podle vztahu

$$m = V\varrho_1 = 11{,}2\,\mathrm{m} \cdot 7{,}2\,\mathrm{m} \cdot 2{,}8\,\mathrm{m} \cdot 1{,}20\,\mathrm{kg/m^3} \doteq 270{,}95\,\mathrm{kg} \doteq 270\,\mathrm{kg}.$$

To je více než hodnota světového rekordu, vzduch by nebylo možné unést. **3 body**

Poznámka: Světový rekord v nadhozu gruzínského přeborníka v supertěžké váze nad 109 kg Laši Talachadzeho je 267 kg, jedná se však o opravdu výjimečný výkon.



Obr. 1: Graf k řešení úlohy FO64E2-1

b) Teplá voda musí odevzdat vzduchu teplo

$$Q = mc_1\Delta t = 270{,}95\,\mathrm{kg}\cdot 1\,000\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)}\cdot 5\,{}^\circ\mathrm{C} \doteq 1\,354\,700\,\mathrm{J} \doteq 1{,}4\,\mathrm{MJ}.$$

Objem vody, která musí protéct topením, je dán

$$V = \frac{Q}{c_2(t_1 - t_2)\varrho} = \frac{1\,354\,700\,\mathrm{J}}{4\,200\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)}\cdot(65\,{}^\circ\mathrm{C} - 25\,{}^\circ\mathrm{C})\cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}} \doteq$$
$$\doteq 8{,}064\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3} \doteq 8{,}1\,\mathrm{dm^3}.$$

4 body

c) Výkon radiátoru pak vychází

$$P = \frac{Q}{\tau} = \frac{1\,354\,700\,\mathrm{J}}{3\,600\,\mathrm{s}} \doteq 376{,}31\,\mathrm{W} \doteq 380\,\mathrm{W}.$$ **3 body**

FO64E2-3: Nádoba s pískem *J. Thomas*

a) Označme h_1 hloubku ponoření nádoby, plochu dna $S = 40\,\mathrm{cm^2} = 0{,}004\,0\,\mathrm{m^2}$ a hmotnost nádoby $m = 200\,\mathrm{g} = 0{,}2\,\mathrm{kg}$. Objem vody odpovídající vztlakové síle pak je $V = Sh_1$. Tíha nádoby mg je rovna vztlakové síle $V\varrho g$, neboli

$$mg = V\varrho g = Sh_1\varrho g, \qquad \Longrightarrow \qquad h_1 = \frac{m}{S\varrho} = \frac{200\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{g/cm^3}\cdot 40\,\mathrm{cm^2}} = 5{,}0\,\mathrm{cm}.$$ **3 body**

b) Při výšce $h_\mathrm{p} = 5\,\mathrm{mm} = 0{,}5\,\mathrm{cm}$ jsme přisypali objem písku

$$V_\mathrm{p1} = Sh_\mathrm{p} = 40\,\mathrm{cm^2}\cdot 0{,}5\,\mathrm{cm} = 20\,\mathrm{cm^3}.$$

Jeho hmotnost byla

$$m_\mathrm{p1} = V_\mathrm{p1}\varrho_\mathrm{p} = 20\,\mathrm{cm^3}\cdot 1{,}5\,\mathrm{g/cm^3} = 30\,\mathrm{g}.$$

Tíha nádoby s pískem je rovna vztlakové síle, při ponoření nádoby do hloubky

h_2 můžeme psát

$$(m + m_\mathrm{p})\, g = S h_2 \varrho g,$$

odkud vyjádříme

$$h_2 = \frac{m + m_\mathrm{p}}{S\varrho} = \frac{200\,\mathrm{g} + 30\,\mathrm{g}}{40\,\mathrm{cm}^2 \cdot 1{,}0\,\mathrm{g/cm}^3} = 5{,}75\,\mathrm{cm} \doteq 5{,}8\,\mathrm{cm}.$$ **3 body**

c) Aby okolní voda sahala po horní okraj nádoby, musí se opět tíha nádoby s pískem o hledaném objemu V_p rovnat vztlakové síle, takže

$$(m + V_\mathrm{p}\varrho_\mathrm{p})\, g = S h \varrho g.$$

Získáváme

$$V_\mathrm{p} = \frac{S h \varrho - m}{\varrho_\mathrm{p}} = \frac{40\,\mathrm{cm}^2 \cdot 10\,\mathrm{cm} \cdot 1{,}0\,\mathrm{g/cm}^3 - 200\,\mathrm{g}}{1{,}5\,\mathrm{g/cm}^3} \doteq 133{,}33\,\mathrm{cm}^3 \doteq 130\,\mathrm{ml}.$$

4 body

Poznámka: Uznat lze i řešení úvahou vycházející ze skutečnosti, že hmotnost plovoucího tělesa odpovídá hmotnosti vytlačené vody, např. v části a) pak přímo získáme $m = S h_1 \varrho$ a $h_1 = m/(S\varrho)$.

FO64E2-4: Odpory *I. Volf*

a) Celkový odpor 3 rezistorů zapojených do série (vedle sebe) je

$$R_\mathrm{a} = 3R_1 = 3 \cdot 150\,\Omega = 450\,\Omega.$$

Proud procházející přívodními vodiči pak bude

$$I = \frac{U}{R_\mathrm{a}} = \frac{4{,}5\,\mathrm{V}}{450\,\Omega} = 0{,}010\,\mathrm{A} = 10\,\mathrm{mA}.$$ **2 body**

b) Stejný proud $I = 0{,}010\,\mathrm{A}$ protéká všemi třemi rezistory, a tedy i mezi zdířkami B a C. Z Ohmova zákona odvodíme

$$U_\mathrm{BC} = R_1 I = 150\,\Omega \cdot 0{,}010\,\mathrm{A} = 1{,}5\,\mathrm{V}.$$ **1 bod**

Poznámka: Napětí lze zdůvodnit i tak, že na každém ze tří stejných rezistorů musí být stejné napětí, takže napětí mezi zdířkami AB, BC a CD jsou stejná a rovna $U/3 = 1{,}5\,\mathrm{V}$.

c) Připojením rezistoru o odporu $R_2 = 100\,\Omega$ se změní odpor celé soustavy. Výsledný odpor mezi zdířkami B a C vypočítáme jako odpor paralelně zapojených rezistorů R_1 a R_2, vychází

$$R_\mathrm{BC} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{150\,\Omega \cdot 100\,\Omega}{150\,\Omega + 100\,\Omega} = 60\,\Omega.$$

Výsledný odpor celého zapojení pak bude výsledkem dvou rezistorů R_1 a vypočítaného odporu R_BC

$$R_\mathrm{c} = 2R_1 + R_\mathrm{BC} = 2 \cdot 150\,\Omega + 60\,\Omega = 360\,\Omega$$

a přívodními vodiči poteče proud

$$I_\mathrm{c} = \frac{U}{R_\mathrm{c}} = \frac{4{,}5\,\mathrm{V}}{360\,\Omega} = 0{,}012\,5\,\mathrm{A} \doteq 13\,\mathrm{mA}.$$

Mezi zdířkami B a C pak bude napětí

$$U'_\mathrm{BC} = R_\mathrm{BC} I = 60\,\Omega \cdot 0{,}012\,5\,\mathrm{A} = 0{,}75\,\mathrm{V}.$$ **4 body**

Napětí mezi zdířkami je tak poloviční oproti případu b).

d) V případě připojení rezistoru o odporu $R_3 = 15\,000\,\Omega$ můžeme postupovat analogicky. Výsledný odpor mezi zdířkami B a C vypočítáme jako odpor paralelně zapojených rezistorů R_1 a R_3, vychází

$$R'_{\mathrm{BC}} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = \frac{150\,\Omega \cdot 15\,000\,\Omega}{150\,\Omega + 15\,000\,\Omega} \doteq 148{,}51\,\Omega \doteq 150\,\Omega.$$

Výsledný odpor celého zapojení pak bude výsledkem dvou rezistorů R_1 a vypočítaného odporu R'_{BC}

$$R_{\mathrm{d}} = 2R_1 + R'_{\mathrm{BC}} = 2 \cdot 150\,\Omega + 148{,}51\,\Omega = 448{,}51\,\Omega \doteq 450\,\Omega.$$

a přívodními vodiči poteče proud

$$I_{\mathrm{c}} = \frac{U}{R_{\mathrm{d}}} = \frac{4{,}5\,\mathrm{V}}{148{,}51\,\Omega} = 0{,}010\,033\,\mathrm{A} \doteq 10\,\mathrm{mA}.$$

Mezi zdířkami B a C pak bude napětí

$$U_{\mathrm{BC}} = R'_{\mathrm{BC}} I_{\mathrm{d}} = 148{,}51\,\Omega \cdot 0{,}010\,033\,\mathrm{A} = 1{,}490\,0\,\mathrm{V} \doteq 1{,}5\,\mathrm{V}.$$ **3 body**

Napětí mezi zdířkami je tak prakticky stejné jako v případě b).

Poznámka: V této části lze uznat i slovní argumentaci, že připojením rezistoru s velkým odporem paralelně k R_1 se odpor mezi zdířkami B a C prakticky nezmění, nezmění se výrazněji ani celkový proud a proto i napětí mezi zdířkami bude téměř stejné jako v části b).