Řešení úloh školního kola 64. ročníku Fyzikální olympiády ve školním roce 2022/2023

Kategorie E a F

FO64EF1-1: Zapomnětlivý táta *J. Thomas*

a) Tatínek uběhne rychlostí $v_1 = 12\,\mathrm{km/h} \doteq 3{,}333\,3\,\mathrm{m/s}$ vzdálenost $s = 1\,600\,\mathrm{m} = 1{,}6\,\mathrm{km}$ domů a zpátky a k tomu ještě vzdálenost, o kterou poodjela maminka rychlostí $v_{\mathrm{m1}} = 4\,\mathrm{km/h} \doteq 1{,}111\,1\,\mathrm{m/s}$, za čas t_1, pro který platí

$$v_1 t_1 = 2s + v_{\mathrm{m1}} t_1,$$

$$t_1 = \frac{2s}{v_1 - v_{\mathrm{m1}}} = \frac{2 \cdot 1{,}6\,\mathrm{km}}{12\,\mathrm{km/h} - 4\,\mathrm{km/h}} = 0{,}40\,\mathrm{h} = 24\,\mathrm{min} \qquad (= 1\,440\,\mathrm{s}).$$

Lucinka musela na láhev čekat 24 min. **3 body**

Vzdálenost od domova při krmení byla

$$s_1 = s + v_{\mathrm{m1}} t_1 = 1{,}6\,\mathrm{km} + 4\,\mathrm{km/h} \cdot 0{,}4\,\mathrm{h} = 3{,}2\,\mathrm{km} = 3\,200\,\mathrm{m}.$$ **2 body**

b) Tatínek musí nejprve uběhnout vzdálenost $s_1 + d$ rychlostí $v_2 = 10\,\mathrm{km/h} \doteq 2{,}777\,8\,\mathrm{m/s}$ za čas

$$t_2 = \frac{s_1 + d}{v_2} = \frac{3{,}2\,\mathrm{km} + 0{,}4\,\mathrm{km}}{10\,\mathrm{km/h}} = 0{,}36\,\mathrm{h} \doteq 22\,\mathrm{min} \qquad (= 1\,296\,\mathrm{s} \doteq 1\,300\,\mathrm{s}).$$

Na zpáteční cestě ke kočárku uběhne vzdálenost menší o část $s_2 = v_{\mathrm{m2}} t_2 = 3{,}0\,\mathrm{km/h} \cdot 0{,}36\,\mathrm{h} = 1{,}08\,\mathrm{km}$, kterou ujela zatím maminka s kočárkem. Vzdálenost na zpáteční cestě $s_3 = s_1 + d - s_2 = 3{,}2\,\mathrm{km} + 0{,}4\,\mathrm{km} - 1{,}08\,\mathrm{km} = 2{,}52\,\mathrm{km}$. Tatínek ale běží menší rychlostí $v_3 = 7\,\mathrm{km/h} \doteq 1{,}944\,4\,\mathrm{m/s}$ a maminka s kočárkem mu jde stále naproti. Pro čas t_3, za který se setkají, můžeme psát

$$v_3 t_3 = s_3 - v_{\mathrm{m2}} t_3,$$

$$t_3 = \frac{s_3}{v_3 + v_{\mathrm{m2}}} = \frac{2{,}52\,\mathrm{km}}{7\,\mathrm{km/h} + 3\,\mathrm{km/h}} = 0{,}252\,\mathrm{h} \doteq 15\,\mathrm{min} \qquad (\doteq 907{,}2\,\mathrm{s} \doteq 910\,\mathrm{s}).$$

Na suchou plenku musí tedy Lucinka čekat celkem

$$t_2 + t_3 = 0{,}36\,\mathrm{h} + 0{,}252\,\mathrm{h} = 0{,}612\,\mathrm{h} \doteq 37\,\mathrm{min}.$$ **3 body**

Vzdálenost od domova při přebalování byla

$$s_4 = v_3 t_3 = 7{,}0\,\mathrm{km/h} \cdot 0{,}252\,\mathrm{h} = 1{,}764\,\mathrm{km} \doteq 1\,800\,\mathrm{m}.$$ **2 body**

FO64E1-2: Tři automobily *J. Thomas*

Údaje z tabulky postupně zaznamenáme do grafu. Z tabulky v zadání úlohy vidíme, že 1. automobilu odpovídají hodnoty:

t/s	0	40	100	120	160
x/km	34,4	33,6	32,4	32	31,2

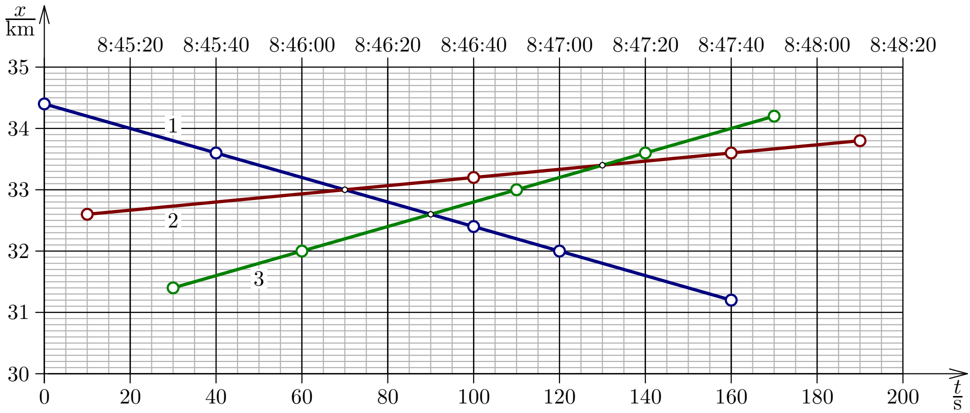
Podobně pro 2. automobil dostáváme:

t/s	10	100	160	190
x/km	32,6	33,2	33,6	33,8

Konečně pro 3. automobil zbývají hodnoty:

t/s	30	60	110	140	170
x/km	31,4	32,0	33,0	33,6	34,2

Při rovnoměrném pohybu musí zaznamenané polohy každého automobilu v grafu ležet na přímce, body odpovídající jednotlivým automobilům proto proložíme přímkou. Příklad grafu je na obr. 1.



Obr. 1: Graf k řešení úlohy FO64E1-2 (rozlišení jednotlivých automobilů)

4 body

První automobil jede v protisměru rychlostí
$$v_1 = \frac{34{,}4\,\mathrm{km} - 31{,}2\,\mathrm{km}}{160\,\mathrm{s} - 0\,\mathrm{s}} = \frac{3\,200\,\mathrm{m}}{160\,\mathrm{s}} = 20\,\mathrm{m/s} = 72\,\mathrm{km/h}.$$
Druhý a třetí automobil jedou rychlostmi
$$v_2 = \frac{33{,}8\,\mathrm{km} - 32{,}6\,\mathrm{km}}{190\,\mathrm{s} - 10\,\mathrm{s}} = \frac{1\,200\,\mathrm{m}}{180\,\mathrm{s}} \doteq 6{,}7\,\mathrm{m/s} = 24\,\mathrm{km/h},$$
$$v_3 = \frac{34{,}2\,\mathrm{km} - 31{,}4\,\mathrm{km}}{170\,\mathrm{s} - 30\,\mathrm{s}} = \frac{2\,800\,\mathrm{m}}{140\,\mathrm{s}} \doteq 20\,\mathrm{m/s} = 72\,\mathrm{km/h}.$$

3 body

Poznámka: Pro výpočet rychlostí lze použít libovolnou dvojici hodnot polohy a času pro daný automobil.

Místa a časy jejich setkání určíme z grafu:
1 a 2 se setkají na 33,0 km v 8:46:10 (70 s po začátku měření),
2 a 3 se setkají na 33,4 km v 8:47:10 (130 s po začátku měření) a
1 a 3 se setkají na 32,6 km v 8:46:30 (90 s po začátku měření). **3 body**

FO64EF1-3: Průměrná rychlost

J. Thomas

a) Na každém úseku známe velikosti dráhy a rychlosti, jednotlivé časy dopočítáme. Pro první úsek vychází

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{20\,\mathrm{km}}{40\,\mathrm{km/h}} = \frac{1}{2}\mathrm{h} = 0{,}5\,\mathrm{h} = 30\,\mathrm{min}.$$

Podobně

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{30\,\mathrm{km}}{80\,\mathrm{km/h}} = \frac{3}{8}\mathrm{h} = 0{,}375\,\mathrm{h} \doteq 0{,}38\,\mathrm{h} \doteq 23\,\mathrm{min},$$

$$t_3 = \frac{s_3}{v_3} = \frac{60\,\mathrm{km}}{120\,\mathrm{km/h}} = \frac{1}{2}\mathrm{h} = 0{,}5\,\mathrm{h} = 30\,\mathrm{min},$$

$$t_4 = \frac{s_4}{v_4} = \frac{10\,\mathrm{km}}{80\,\mathrm{km/h}} = \frac{1}{8}\mathrm{h} = 0{,}125\,\mathrm{h} \doteq 0{,}13\,\mathrm{h} = 7{,}5\,\mathrm{min}.$$

3 body

b) Průměrnou rychlost určujeme jako podíl celkové dráhy a celkového času, na celé trase to tedy bude

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} = \frac{120\,\mathrm{km}}{0{,}5\,\mathrm{h} + 0{,}375\,\mathrm{h} + 0{,}5\,\mathrm{h} + 0{,}125\,\mathrm{h}} = 80\,\mathrm{km/h}.$$ **2 body**

c) Průměrná rychlost na první polovině celkové dráhy bude

$$v_\mathrm{p1} = \frac{\frac{s}{2}}{t_1 + t_2 + \frac{t_3}{6}} = \frac{\frac{120\,\mathrm{km}}{2}}{0{,}5\,\mathrm{h} + 0{,}375\,\mathrm{h} + \frac{0{,}5\,\mathrm{h}}{6}} \doteq 62{,}609\,\mathrm{km/h} \doteq 63\,\mathrm{km/h}.$$

2 body

d) K určení průměrné rychlosti za první polovinu celkového času, tedy za

$$\frac{t}{2} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{2} = \frac{0{,}5\,\mathrm{h} + 0{,}375\,\mathrm{h} + 0{,}5\,\mathrm{h} + 0{,}125\,\mathrm{h}}{2} = 0{,}75\,\mathrm{h},$$

musíme určit, kde se v tomto čase auto nachází. Protože $t_1 + t_2 = 0{,}5\,\mathrm{h} + 0{,}375\,\mathrm{h} = 0{,}875\,\mathrm{h} > t/2$, auto se v polovině času nachází ve druhém úseku, ve kterém za dobu $t_{21} = t/2 - t_1 = 0{,}75\,\mathrm{h} - 0{,}5\,\mathrm{h} = 0{,}25\,\mathrm{h}$ ujede dráhu $s_{21} = v_2 t_{21} = 80\,\mathrm{km/h} \cdot 0{,}25\,\mathrm{h} = 20\,\mathrm{km}$. Hledaná průměrná rychlost pak vychází

$$v_\mathrm{p2} = \frac{s_1 + s_{21}}{\frac{t}{2}} = \frac{20\,\mathrm{km} + 20\,\mathrm{km}}{0{,}75\,\mathrm{h}} \doteq 53{,}333\,\mathrm{km/h} \doteq 53\,\mathrm{km/h}.$$ **3 body**

FO64EF1-4: Pohon automobilů

J. Thomas

Vzhledem k většímu množství zadaných veličin je v této úloze výhodnější vyhnout se jejich označování i obecnému vyjádření výsledku a pracovat přímo s číselnými hodnotami.

a) Spotřeba na 1 km vychází ze zadaných hodnot

$$\frac{80\,\mathrm{kWh}}{450\,\mathrm{km}} \doteq 0{,}177\,78\,\mathrm{kWh/km} \doteq 0{,}18\,\mathrm{kWh/km},$$

na 100 km to bude 100× více, tedy 18 kWh. **2 body**

b) Při snížení nabití baterie z 90 % na 10 %, tj. o 80 % procentních bodů, byla spotřebována energie

$$80\,\% \cdot 80\,\mathrm{kWh} = 0{,}8 \cdot 80\,\mathrm{kWh} = 64\,\mathrm{kWh}.$$

Při účinnosti nabíjení 92 % musíme nabíjením dodat energii

$$\frac{64\,\mathrm{kWh}}{0{,}92} \doteq 69{,}565\,\mathrm{kWh} \doteq 70\,\mathrm{kWh}$$

za cenu

$$70\,\mathrm{kWh} \cdot 15\,\mathrm{Kč/kWh} = 1\,050\,\mathrm{Kč}.$$ **4 body**

Spotřeba odpovídá 80 % maximální dojezdové vzdálenosti, tj. $0{,}8 \cdot 450\,\mathrm{km} = 360\,\mathrm{km}$. **1 bod**

Poznámka: Vypočtená cena hodně závisí na způsobu zaokrouhlování, doporučujeme proto uznávat hodnoty v rozmezí 1 000 Kč – 1 100 Kč.

c) Na výrobu 1 kg vodíku je potřeba energie 45 kWh, na výrobu 5,6 kg vodíku je to

$$5{,}6\,\mathrm{kg} \cdot 45\,\mathrm{kWh/kg} = 252\,\mathrm{kWh}.$$

Na ujetí 1 km je zapotřebí

$$\frac{252\,\mathrm{kWh}}{590\,\mathrm{km}} \doteq 0{,}427\,12\,\mathrm{kWh/km} \doteq 0{,}43\,\mathrm{kWh/km},$$

na 100 km to bude 100× více, tedy 43 kWh. To je výrazně více, než u elektromobilu v části a). **3 body**

Poznámka: K výsledku lze dospět i jinou cestou; např. úvahou, že pokud se na 590 km spotřebuje 5,6 kg vodíku, na 100 km se spotřebuje $5{,}6\,\mathrm{kg}/5{,}9 \doteq 0{,}949\,15\,\mathrm{kg} \doteq 0{,}95\,\mathrm{kg}$. Na výrobu tohoto množství se spotřebuje

$$0{,}949\,15\,\mathrm{kg} \cdot 45\,\mathrm{kWh/kg} \doteq 42{,}712\,\mathrm{kWh} \doteq 43\,\mathrm{kWh}.$$

FO64E1-5: Zpožděné Pendolino

Ľ. Konrád

a) Ze zadání dopočítáme dobu jízdy v jednotlivých úsecích, pro část Ostrava–Praha vychází $t_1 = 10{:}32 - 7{:}07 = 3{:}25 \doteq 3{,}416\,7\,\mathrm{h}$, pro část Praha–Cheb pak $t_2 = 13{:}26 - 10{:}32 = 2{:}54 = 2{,}9\,\mathrm{h}$. Pro průměrnou rychlost v úseku Ostrava–Praha tak dostáváme

$$v_1 = \frac{s_1}{t_1} = \frac{356\,\mathrm{km}}{3{,}416\,7\,\mathrm{h}} \doteq 104{,}19\,\mathrm{km/h} \doteq 100\,\mathrm{km/h},$$

z Prahy do Chebu

$$v_2 = \frac{s_2}{t_2} = \frac{213\,\mathrm{km}}{2{,}9\,\mathrm{h}} \doteq 73{,}448\,\mathrm{km/h} \doteq 73\,\mathrm{km/h},$$

pro celou trasu Ostrava–Cheb

$$v_\mathrm{p} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{356\,\mathrm{km} + 213\,\mathrm{km}}{3{,}416\,7\,\mathrm{h} + 2{,}9\,\mathrm{h}} \doteq 90{,}079\,\mathrm{km/h} \doteq 90\,\mathrm{km/h}.$$ **4 body**

b) Doba jízdy do z Prahy do Chebu musela být o $\Delta t = 10\,\mathrm{min} = \frac{1}{6}\,\mathrm{h} \doteq 0{,}166\,67\,\mathrm{h}$ kratší, tj. $t_3 = t_2 - \Delta t = 2{,}9\,\mathrm{h} - 0{,}166\,67\,\mathrm{h} = 2{,}733\,3\,\mathrm{h}$ a průměrná rychlost z Prahy do Chebu musela být

$$v_3 = \frac{s_2}{t_3} = \frac{213\,\mathrm{km}}{2{,}733\,3\,\mathrm{h}} \doteq 77{,}928\,\mathrm{km/h} \doteq 78\,\mathrm{km/h}.$$ **3 body**

c) Při průměrné rychlosti $v = 90\,\mathrm{km/h}$ urazí vlak vzdálenost Praha–Cheb za čas

$$t_4 = \frac{s_2}{v} = \frac{213\,\mathrm{km}}{90\,\mathrm{km/h}} \doteq 2{,}366\,7\,\mathrm{h} = 2\,\mathrm{h}\,22\,\mathrm{min}.$$

Hledané maximální zpoždění t_0 v Praze, aby ještě stihl do Chebu dojet včas, pak získáme z rozdílu časů

$$t_0 = t_2 - t_4 = 2{:}54 - 2{:}22 = 32\,\mathrm{min}.$$ **3 body**

Poznámka: Při výpočtu je zanedbána skutečnost, že podle jízdního řádu spoj ve stanici Praha hl. n. stojí 6 minut. Předpokládaná průměrná rychlost v úseku Praha–Cheb je tak o něco vyšší než v_2 vypočtená v části a).

FO64EF1-6: Kon-Tiki *J. Thomas*

a) Výprava urazila vzdálenost $s = 4\,300\,\mathrm{mil} \cdot 1{,}852\,\mathrm{km/míle} = 7\,963{,}6\,\mathrm{km}$ za čas $t = 101\,\mathrm{dní} \cdot 24\,\mathrm{h/den} = 2\,424\,\mathrm{h}$. Průměrná rychlost voru byla

$$v = \frac{s}{t} = \frac{7\,963{,}6\,\mathrm{km}}{2\,424\,\mathrm{h}} \doteq 3{,}285\,3\,\mathrm{km/h} \doteq 3{,}3\,\mathrm{km/h}.$$ **2 body**

Poznámka: Při dané přesnosti můžeme zanedbat, že není určeno, ve které části dne expedice ztroskotala.

b) Objem voru vychází

$$V = 13\,\mathrm{m} \cdot 5{,}5\,\mathrm{m} \cdot 0{,}60\,\mathrm{m} = 42{,}9\,\mathrm{m^3} \doteq 43\,\mathrm{m^3}.$$

Pro jeho hmotnost při hustotě dřeva $\varrho_1 = 0{,}15\,\mathrm{g/cm^3} = 150\,\mathrm{kg/m^3}$ dostáváme

$$m = \varrho_1 V = 150\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 42{,}9\,\mathrm{m^3} = 6\,435\,\mathrm{kg} \doteq 6{,}4\,\mathrm{tuny}.$$ **2 body**

c) Tíhová síla se musí rovnat síle vztlakové. Označíme-li $m_1 = 2{,}4\,\mathrm{tuny}$ hmotnost zátěže, $a = 13\,\mathrm{m}$, $b = 5{,}5\,\mathrm{m}$ vodorovné rozměry voru a h hledanou hloubku ponoru, při hustotě mořské vody $\varrho_2 = 1{,}02\,\mathrm{g/cm^3} = 1\,020\,\mathrm{kg/m^3}$ platí

$$(m + m_1)\,g = abh\varrho_2 g$$

$$h = \frac{m + m_1}{ab\varrho_2} = \frac{6\,435\,\mathrm{kg} + 2\,400\,\mathrm{kg}}{13\,\mathrm{m} \cdot 5{,}5\,\mathrm{m} \cdot 1\,020\,\mathrm{kg/m^3}} \doteq 0{,}121\,14\,\mathrm{m} \doteq 12\,\mathrm{cm}.$$

3 body

d) Změna ponoru o $\Delta h = 1\,\mathrm{cm}$ odpovídá změně zátěže o Δm; z Archimédova zákona dostáváme

$$\Delta m = ab\Delta h\varrho_2 = 13\,\mathrm{m} \cdot 5{,}5\,\mathrm{m} \cdot 0{,}01\,\mathrm{m} \cdot 1\,020\,\mathrm{kg/m^3} = 729{,}3\,\mathrm{kg}.$$

Spotřeba šestičlenné posádky za 1 den je $6 \cdot 0{,}5\,\mathrm{kg} = 3\,\mathrm{kg}$ potravin a $6 \cdot 1{,}5\,\mathrm{litrů} = 9\,\mathrm{litrů}$ vody, tedy celkem $3\,\mathrm{kg} + 9\,\mathrm{kg} = 12\,\mathrm{kg}$. Na cestě tedy byli

$$n = \frac{729{,}3\,\mathrm{kg}}{12\,\mathrm{kg}} \doteq 60{,}775 \doteq 61,$$

tedy při dané změně ponoru 61. den plavby. **3 body**

Poznámka: Lze pochopitelně postupovat i tak, že budeme počítat s novou hloubkou ponoru $h_1 = h - \Delta h = 0{,}121\,14\,\mathrm{m} - 0{,}010\,00\,\mathrm{m} = 0{,}111\,14\,\mathrm{m}$ a určíme tak konečnou hmotnost voru s nákladem

$$m_2 = abh_1\varrho_2 = 13\,\mathrm{m} \cdot 5{,}5\,\mathrm{m} \cdot 0{,}111\,14\,\mathrm{m} \cdot 1\,020\,\mathrm{kg/m^3} \doteq 8\,105{,}4\,\mathrm{kg}$$

a odečtením získáme hmotnost spotřebovaných zásob

$$\Delta m = m + m_1 - m_2 = 6\,435\,\mathrm{kg} + 2\,400\,\mathrm{kg} - 8\,105{,}4\,\mathrm{kg} = 729{,}6\,\mathrm{kg},$$

tedy v rámci zaokrouhlovací chyby stejný výsledek jako předcházejícím postupem.

FO64EF1-7: MVE Polka *L. Richterek*

a) Mechanická polohová energie vody mgh se přeměňuje na elektrickou energii (účinnost přeměny není zadána, počítáme proto s tím, že se přemění všechna), za čas $t = 1\,\mathrm{s}$ se přemění energie vody o hmotnosti dané součinem hustoty a objemového průtoku $m = \varrho V/t = \varrho Q$. Pro výkon dodávaný vodou první turbíně platí

$$P_1 = \frac{m_1 hg}{t} = \frac{\varrho V_1 hg}{t} = \varrho Q_1 gh,$$

$$Q_1 = \frac{P_1}{\varrho gh} = \frac{150\,000\,\mathrm{W}}{1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 18\,\mathrm{m}} \doteq 0{,}850\,34\,\mathrm{m^3/s} \doteq 0{,}85\,\mathrm{m^3/s}.$$

Podobně pro druhou turbínu dostáváme

$$P_2 = \frac{m_2 hg}{t} = \frac{\varrho V_2 hg}{t} = \varrho Q_2 gh,$$

$$Q_2 = \frac{P_2}{\varrho gh} = \frac{300\,000\,\mathrm{W}}{1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 18\,\mathrm{m}} \doteq 1{,}700\,7\,\mathrm{m^3/s} \doteq 1{,}7\,\mathrm{m^3/s}.$$

Pro obě turbíny je potřebný průtok

$$Q = Q_1 + Q_2 = 0{,}850\,34\,\mathrm{m^3/s} + 1{,}700\,7\,\mathrm{m^3/s} = 2{,}551\,0\,\mathrm{m^3/s} \doteq 2{,}6\,\mathrm{m^3/s}.$$

5 bodů

b) Při celkovém plném výkonu elektrárny $P = P_1 + P_2 = 150\,\mathrm{kW} + 300\,\mathrm{kW} = 450\,\mathrm{kW}$ by se energie $E = 1{,}38\,\mathrm{GWh} = 1\,380\,000\,\mathrm{kWh}$ vyrobila za čas

$$t = \frac{E}{P} = \frac{1\,380\,000\,\mathrm{kWh}}{450\,\mathrm{kW}} \doteq 3\,066{,}7\,\mathrm{h} \doteq 127{,}78\,\text{dní} \doteq 130\,\text{dní}.$$

3 body

c) Na jednu domácnost připadá roční spotřeba energie

$$E_1 = \frac{E}{500} = \frac{1\,380\,000\,\mathrm{kWh}}{500} \doteq 2\,760\,\mathrm{kWh} \doteq 2\,800\,\mathrm{kWh}.$$

Při dané ceně by za ni zaplatila $11E_1 = 11\,\text{Kč/kWh} \cdot 2\,760\,\mathrm{kWh} = 30\,360\,\text{Kč} \doteq 30\,000\,\text{Kč}$. **2 body**

FO64EF1-8: Kladky a závaží *J. Thomas*

a) Tíha každého závaží o hmotnosti m se rozdělí na dvě sousední nitě. Aby byla soustava v rovnováze, musí být hmotnost

$$m_x = \frac{m}{2} = \frac{1{,}0\,\mathrm{kg}}{2} = 0{,}5\,\mathrm{kg}.$$

2 body

Na 4 závěsy pevných kladek působí tíha

$$F_{G1} = (3m + 2m_x)\,g = \left(3m + 2\frac{m}{2}\right) g = 4mg = 4 \cdot 1{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} = 39{,}2\,\mathrm{N} \doteq 39\,\mathrm{N},$$

na jeden závěs tedy působí síla o velikosti $F_1 = F_{G1}/4 = mg = 1{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} = 9{,}8\,\mathrm{N}$. **2 body**

b) Tíha každého závaží o hmotnosti m a každé volné kladky o hmotnosti $m_\mathrm{k} = m/2$ se rozdělí na dvě sousední nitě. Aby byla soustava v rovnováze, musí být

$$m_y = \frac{m + m_\mathrm{k}}{2} = \frac{1{,}0\,\mathrm{kg} + 0{,}50\,\mathrm{kg}}{2} = 0{,}75\,\mathrm{kg} = \frac{3}{4}m. \qquad \textbf{3 body}$$

Na 4 závěsy pevných kladek působí tíha všech závaží a 7 kladek

$$F_{G2} = (3m + 2m_y + 7m_\mathrm{k})\,g = (3\cdot 1{,}0\,\mathrm{kg} + 2\cdot 0{,}75\,\mathrm{kg} + 7\cdot 0{,}5\,\mathrm{kg})\,g =$$
$$= 8mg = 8\cdot 1{,}0\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} = 78{,}4\,\mathrm{N} \doteq 78\,\mathrm{N},$$

na jeden závěs tedy působí síla o velikosti $F_2 = F_{G2}/4 = 2mg = 2\cdot 1{,}0\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} = 19{,}6\,\mathrm{N} \doteq 20\,\mathrm{N}$. **3 body**

FO64E1-9: Lázeňské prameny *L. Richterek*

a) Označme $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$ hustotu a $c = 4\,200\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)}$ měrnou tepelnou kapacitu vody (jejich číselné hodnoty nejsou pro výpočet nutné). Pro výslednou teplotu t platí kalorimetrická rovnice

$$\varrho\frac{V}{2}c\,(t_2 - t) = \varrho\frac{V}{2}c\,(t - t_1)\,, \qquad t_2 - t = t - t_1,$$

odkud vychází

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{18\,^\circ\mathrm{C} + 48\,^\circ\mathrm{C}}{2} = 33\,^\circ\mathrm{C}. \qquad \textbf{3 body}$$

b) Pro teplotu pramene Rusalka t_R podobně platí kalorimetrické rovnice

$$\varrho\frac{V}{3}c\,(t_\mathrm{R} - t_3) = \varrho\frac{2V}{3}c\,(t_3 - t_1)\,, \qquad t_\mathrm{R} - t_3 = 2t_3 - 2t_1,$$

odkud dostáváme

$$t_\mathrm{R} = 3t_3 - 2t_1 = 3\cdot 32\,^\circ\mathrm{C} - 2\cdot 18\,^\circ\mathrm{C} = 60\,^\circ\mathrm{C}. \qquad \textbf{3 body}$$

Poznámka: Doporučujeme uznávat i výsledek získaný dosazením číselných hodnot bez obecného vyjádření výsledné teploty.

c) Označme V_1 objem vody napuštěné z vřídla, V_2 objem dolitý z PET lahve. Z kalorimetrické rovnice dostaneme

$$\varrho V_1 c\,(t_4 - t_5) = \varrho V_2 c\,(t_5 - t_1)$$

a poměr

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{t_4 - t_5}{t_5 - t_1} = \frac{72\,^\circ\mathrm{C} - 36\,^\circ\mathrm{C}}{36\,^\circ\mathrm{C} - 18\,^\circ\mathrm{C}} = \frac{36}{18} = \frac{2}{1}.$$

Musíme rozdělit objem $V = 120\,\mathrm{ml}$ v poměru 2:1, tudíž $V_1 = 40\,\mathrm{ml}$ a $V_2 = 80\,\mathrm{ml}$. **4 body**

FO64E1-10: Hromosvod *J. Thomas*

a) Kolikrát je vodič delší, tolikrát má větší odpor, kolikrát má větší průřez, tolikrát má odpor menší. Má-li tedy vodič o délce $l_1 = 1{,}0\,\mathrm{m}$ a průřezu $S_1 = 1{,}0\,\mathrm{mm^2}$ odpor $R_1 = 0{,}028\,\Omega$, bude mít hromosvod odpor 30× větší a 50× menší. Odpor hromosvodu je

$$R = R_1\frac{l}{l_1}\frac{S_1}{S} = 0{,}028\,\Omega\cdot\frac{30\,\mathrm{m}}{1{,}0\,\mathrm{m}}\cdot\frac{1\,\mathrm{mm^2}}{50\,\mathrm{mm^2}} = 0{,}016\,8\,\Omega \doteq 17\,\mathrm{m\Omega}. \qquad \textbf{3 body}$$

b) Teplo uvolněné ve vodiči závisí na velikosti jeho odporu, velikosti procházejícího proudu a na času a je rovno práci vykonané elektrickým proudem, takže

$$Q = W = RI_1^2\tau_1 + RI_2^2\tau_2 = R\left(I_1^2\tau_1 + I_2^2\tau_2\right) =$$
$$= 0{,}016\,8\,\Omega \cdot \left[(100\,000\,\mathrm{A})^2 \cdot 0{,}001\,\mathrm{s} + (1\,000\,\mathrm{A})^2 \cdot 1{,}0\,\mathrm{s}\right] = 184\,800\,\mathrm{J} \doteq 180\,\mathrm{kJ}.$$

3 body

c) Uvolněným teplem se ohřeje hliníkový vodič o hmotnosti $m = \varrho_1 S l = 2\,700\,\mathrm{kg/m^2} \cdot 0{,}000\,050\,\mathrm{m^2} \cdot 30\,\mathrm{m} \doteq 4{,}050\,0\,\mathrm{kg}$ o teplotu Δt, pro kterou platí

$$Q = mc_1\Delta t = \varrho_1 S l c_1 \Delta t,$$
$$\Delta t = \frac{Q}{mc_1} = \frac{184\,800\,\mathrm{J}}{4{,}050\,0\,\mathrm{kg} \cdot 900\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)}} \doteq 50{,}700\,{}^\circ\mathrm{C} \doteq 51\,{}^\circ\mathrm{C}.$$

2 body

d) Stejným teplem by se ohřálo z teploty $t_1 = 20\,{}^\circ\mathrm{C}$ na $t_2 = 100\,{}^\circ\mathrm{C}$ množství vody

$$\Delta m_1 = \frac{Q}{c_2(t_2 - t_1)} = \frac{184\,800\,\mathrm{J}}{4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot (100\,{}^\circ\mathrm{C} - 20\,{}^\circ\mathrm{C})} \doteq 0{,}550\,00\,\mathrm{kg} \doteq 0{,}55\,\mathrm{kg},$$

tedy více než půl litru vody. **2 body**