Řešení úloh 2. kola 65. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Úlohy navrhli J. Thomas (1, 2, 3) a J. Šlégr (4)

1. Označme x souřadnici začátku pravítka měřenou od rozhraní hladké a drsné plochy. Pokud bude $x \leq L$ (pak je x délka části pravítka, která se právě nachází na drsné ploše), bude síla tření $F = mg\frac{x}{L}$. Pokud $x \geq L$, bude $F = fmg$.

a) Ze zákona síly

$$ma = -fmg\frac{x}{L}$$

plyne, že síla je přímo úměrná přesahu x pravítka do drsné části plochy a má opačný směr. Jelikož jde o rovnici pro harmonický pohyb, platí $x = x_0 \sin \omega t$ pro „výchylku" a $v = v_0 \cos \omega t$ pro rychlost, přičemž $x_0 = \dfrac{v_0}{\omega}$. Úhlovou frekvenci určíme ze vztahu

$$a = -\omega^2 x = -fg\frac{x}{L} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{fg}{L}}.$$

Pro okamžitý výkon $P = Fv$ síly tření dostáváme

$$P = m\omega^2 x \cdot v = m\omega^2 \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \cdot v_0 \cos \omega t = \frac{mv_0^2}{2}\sqrt{\frac{fg}{L}} \cdot \sin 2\omega t.$$

Výkon bude maximální pro $\sin 2\omega t = 1$, tedy pro čas

$$t_{\max,1} = \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{\frac{L}{fg}}.$$

Jeho velikost je

$$P_{\max,1} = \frac{mv_0^2}{2}\sqrt{\frac{fg}{L}}.$$

4 body

b) Pravítko přejede úplně rozhraní v okamžiku t', určeném vztahem $x_0 \sin \omega t' = L$, tj. pro

$$\sin \omega t' = \frac{\sqrt{fgL}}{v_0}.$$

(Aby pravítko mohlo přejet rozhraní, musí být $v_0 \geq \sqrt{fgL}$.) Řešení se odvíjí od porovnání časů t' a $t_{\max,1}$. Porovnáme je prostřednictvím jim příslušných funkcí sinus:

i) Pro $t' < t_{\max,1}$, tj. pro $\sin \omega t' < \sin \omega t_{\max,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, resp. pro $v_0 > \sqrt{2fgL}$ opustí pravítko rozhraní dříve, než by výkon třecích sil dosáhl svého absolutního maxima $P_{\max 1}$. Výkon třecí síly poroste pouze do okamžiku

$$t_{\max,2} = t' = \sqrt{\frac{L}{fg}} \arcsin \frac{\sqrt{fgL}}{v_0},$$

poté začne klesat, neboť ustane růst třecí síly. Maximální hodnota výkonu bude

$$P_{\max,2} = m\omega^2 \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t' v_0 \cos \omega t' = m\omega v_0^2 \sin \omega t' \sqrt{1 - \sin^2 \omega t'} = fmg\sqrt{v_0^2 - fgL}.$$

3 body

Alternativní řešení: Ze zákona zachování energie

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + fmg\frac{L}{2}$$

pro harmonický pohyb plyne, že v okamžiku, kdy se pravítko dostává celé na drsnou část roviny, má ještě rychlost $v' = \sqrt{v_0^2 - fgL}$. Jelikož od této chvíle síla tření již dále neroste (a rychlost pravítka nadále klesá), dosáhne v tomto okamžiku třecí síla svého maximálního výkonu:

$$P_{\max,2} = Fv' = fmg \cdot \sqrt{v_0^2 - fgL}.$$

ii) Pro $\sqrt{fgL} \leq v_0 \leq \sqrt{2fgL}$ je $t_{\max,1} \leq t'$. Výkon třecích sil tak dosáhne svého absolutního maxima ještě předtím, než pravítko opustí hladkou plochu:

$$t_{\max,3} = t_{\max,1} = \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{\frac{L}{fg}},$$

$$P_{\max,3} = P_{\max,1} = \frac{mv_0^2}{2}\sqrt{\frac{fg}{L}}.$$ **3 body**

2.a) Kromě atmosférického tlaku bude při posunování pístu vpravo působit i tlak vyvolaný stlačováním pružiny.

$$p(x) = p_1 + \frac{kx}{\pi\frac{d^2}{4}} = p_1 + \frac{4kx}{\pi d^2}.$$

Protože

$$x = \frac{V_2}{\pi\frac{d^2}{4}} - \frac{V_1}{\pi\frac{d^2}{4}} = \frac{V_1}{\pi\frac{d^2}{4}} = \frac{4V_1}{\pi d^2},$$

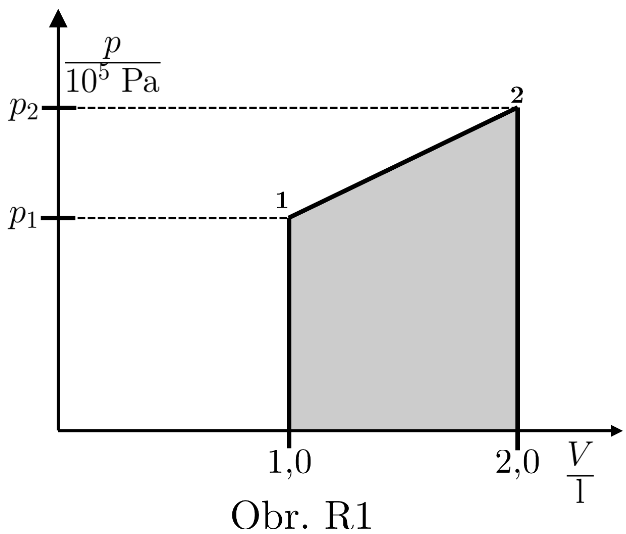
bude tlak

$$p_2 = p_1 + \frac{4kx}{\pi d^2} = p_1 + \frac{16kV_1}{(\pi d^2)^2} = 1{,}5 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}.$$

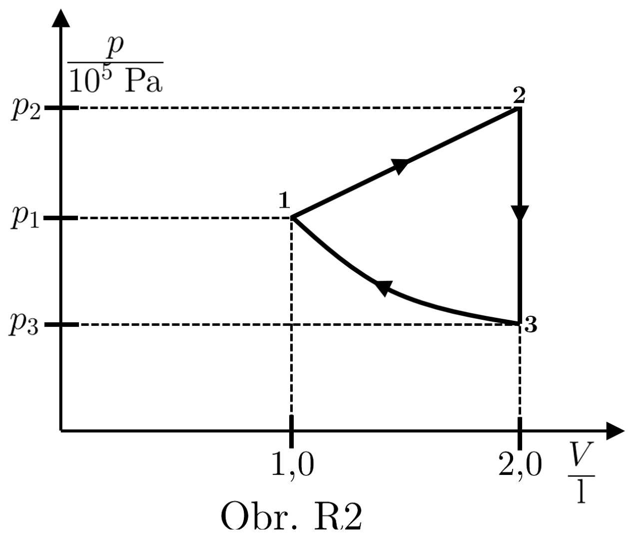
Teplotu T_2 určíme obecně ze stavové rovnice jako

$$T_2 = \frac{p_2V_2T_1}{p_1V_1} = 3T_1 = 879\ \mathrm{K}.$$ **2 body**

b) V p-V diagramu je děj 1–2 zobrazen úsečkou (obr. R1).



Obr. R1



Obr. R2

Práce, kterou plyn vykonal, je rovna obsahu lichoběžníka,

$$W_{12} = \frac{p_1 + p_2}{2} (V_2 - V_1) = 125 \text{ J}.$$ **2 body**

Změna vnitřní energie plynu je

$$\Delta U_{12} = C_V (T_2 - T_1) = \frac{5}{2} \frac{p_1 V_1}{T_1} (T_2 - T_1) .$$

Plyn přijal teplo

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + W_{12} = \frac{7}{2} \left(1 + \frac{11 k V_1}{7 S^2 p_1} \right) p_1 V_1 = 626 \text{ J},$$

kde jsme využili vzorec $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$. **1 bod**

c) Děj 2–3 je izochorický. Podle Charlesova zákona

$$\frac{p_3}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} = \frac{p_2}{3T_1} \quad \Rightarrow \quad p_3 = \frac{p_2}{3} = 0{,}5 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$ **1 bod**

d) Pro kruhový děj 1–2–3–1 je p-V diagram na obr. R2. **1 bod**
Plyn při izochorickém ději 2–3 práci nekoná. Při izotermické kompresi 3–1 vykoná práci

$$W_{31} = nRT_1 \ln \frac{V_1}{V_2} = -p_1 V_1 \ln 2 = -69 \text{ J}.$$

Jelikož teplo plyn přijímá pouze při ději 1–2, je účinnost kruhového děje

$$\eta = \frac{W_{12} + W_{31}}{Q_{12}} = \frac{125 \text{ J} - 69 \text{ J}}{626 \text{ J}} = 9 \text{ \%}.$$

Účinnost, vyjádřená pomocí zadaných veličin:

$$\eta = \frac{2 - 2 \ln 2 + \dfrac{k V_1}{S^2 p_1}}{7 + 11 \, \dfrac{k V_1}{S^2 p_1}}.$$ **3 body**

3. a) Při rozpadu hliníku vzniká izotop hořčíku ${}^{26}_{13}\text{Al} \rightarrow {}^{26}_{12}\text{Mg} + {}^{0}_{+1}e + \nu$,
při rozpadu berylia vzniká izotop bóru ${}^{10}_{4}\text{Be} \rightarrow {}^{10}_{5}\text{B} + {}^{0}_{-1}e + \tilde{\nu}$, kde ν, resp. $\tilde{\nu}$, je elektronové neutrino, resp. antineutrino. **2 body**

b) Rozpadové konstanty jsou

$$\lambda_{\text{Al}} = \frac{\ln 2}{T_{\text{Al}}} = 3{,}06 \cdot 10^{-14} \text{ s}^{-1}, \quad \lambda_{\text{Be}} = \frac{\ln 2}{T_{\text{Be}}} = 1{,}45 \cdot 10^{-14} \text{ s}^{-1}.$$ **2 body**

c) Podle zákona radioaktivní přeměny pro aktivity platí

$$A_{\text{Al}}(t) = A_{\text{Al}}(0) \cdot \mathrm{e}^{-\lambda_{\text{Al}} t}, \quad A_{\text{Be}}(t) = A_{\text{Be}}(0) \cdot \mathrm{e}^{-\lambda_{\text{Be}} t}.$$

Poměr aktivit závisí na čase podle vztahu

$$k(t) = \frac{A_{\text{Al}}(0) \mathrm{e}^{-\lambda_{\text{Al}} t}}{A_{\text{Be}}(0) \mathrm{e}^{-\lambda_{\text{Be}} t}} = k(0) \cdot \mathrm{e}^{(\lambda_{\text{Be}} - \lambda_{\text{Al}}) t}.$$ **2 body**

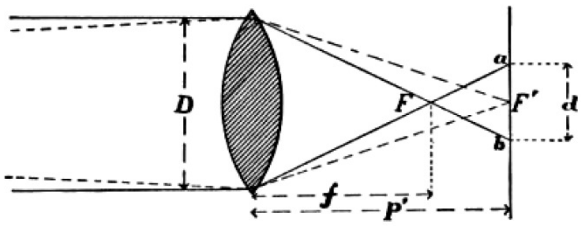
Pro kamenný nástroj platí $k\left(t_{\text{kn}}\right) = k(0) \cdot \mathrm{e}^{(\lambda_{\text{Be}} - \lambda_{\text{Al}}) t_{\text{kn}}}$.

Odtud

$$t_{\mathrm{kn}} = \frac{1}{\lambda_{\mathrm{Be}} - \lambda_{\mathrm{Al}}} \ln \frac{k\left(t_{\mathrm{kn}}\right)}{k(0)} = \frac{T_{\mathrm{Al}} T_{\mathrm{Be}}}{\left(T_{\mathrm{Al}} - T_{\mathrm{Be}}\right) \ln 2} \ln \frac{k\left(t_{\mathrm{kn}}\right)}{k(0)} = 0{,}75 \cdot 10^6 \text{ let.}$$

Pekingský člověk tedy žil asi před 750 tisíci lety. **4 body**

4. Vzdálenost L se ve fotografii často nazývá *hyperfokální vzdálenost* a před více než sto lety ji odvodil Louis Derr (obrázek R3 je převzat z jeho knihy *Fotografie pro studenty fyziky a chemie* z roku 1906). Uvažujme, že fotoaparát je zaostřen na vzdálenost L a obraz je přesně v rovině snímače.



Obr. R3

Vzdálenost předmětu L a vzdálenost jeho obrazu a (p' v obrázku R3) souvisí podle zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{L} + \frac{1}{a} = \frac{1}{f}, \text{ odtud } a = \frac{Lf}{L - f} = \frac{Lf}{L(1 - f/L)} \approx \frac{Lf}{L}\left(1 + \frac{f}{L}\right) = f + \frac{f^2}{L},$$

kde byla použita aproximace $(1 + x)^{-1} \approx 1 - x$ (pro malé x). Vzdálenost obrazu přesahuje ohniskovou vzdálenost o $\Delta a = a - f = f^2/L$. **4 body**

Světlo přicházející z nekonečně vzdáleného objektu projde ohniskem F a vytvoří kužel, který protíná rovina senzoru. Průměr d řezu v rovině senzoru lze zjistit z podobnosti trojúhelníků:

$$\frac{d}{D} = \frac{\Delta a}{f} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{Df}{L}.$$

Vezmeme-li v úvahu podmínku ostrosti $d \leq \eta$, kde $\eta = \dfrac{w}{N}$ je velikost jednoho pixelu snímače, je limitní hodnota L rovna

$$L \geq \frac{Df}{\eta} = \frac{DfN}{w} \approx 5{,}1 \text{ m.}$$ **2 body**

Objekt ve vzdálenosti s bude mít obraz ve vzdálenosti $b = f + f^2/s$ a světlo procházející čočkou se bude sbíhat za rovinu senzoru a vytvoří kužel. Průměr d_2 řezu kužele rovinou senzoru lze vypočítat z podobnosti trojúhelníků:

$$\frac{d_2}{D} = \frac{b - a}{b}.$$

Při zohlednění podmínky ostrosti $d_2 \leq \eta$ můžeme vyjádřit $b = a/(1 - \eta/D)$ a dosazením hodnot a a b získáme

$$f + \frac{f^2}{s} = \frac{f + \frac{f^2}{L}}{1 - \eta/D} = f \frac{1 + \eta/D}{1 - \eta/D} \approx f\left(1 + \frac{\eta}{D}\right)^2 \approx f\left(1 + \frac{2\eta}{D}\right).$$

Platí

$$\frac{f^2}{s} \geq \frac{2f\eta}{D} \quad \Rightarrow \quad s \geq \frac{1}{2}\frac{Df}{\eta} = \frac{L}{2} \approx 2{,}6 \text{ m.}$$ **4 body**