Řešení úloh celostátního kola 65. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie A

Úlohy navrhli: J. Thomas (1, 2, 3) a J. Šlégr (4)

1. a) Rychlost dopadu bedničky na píst určíme ze ZZME:

$$v_0 = \sqrt{2g(h-l-b)}.$$

Rychlost v_1 pístu s bedničkou krátce po nepružném nárazu určíme pomocí zákona zachování hybnosti:

$$m_1 v_0 = (m_1+m_2)\,v_1 \;\Rightarrow\; v_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2} v_0 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\sqrt{2g(h-l-b)}. \quad (1)$$

Pro zadané hodnoty $v_1 = 1{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. **2 body**

b) Na začátku děje je tlak plynu ve válci

$$p_0 = p_a + \frac{m_2 g}{S}.$$

Při stlačování působí na píst tlak p plynu uvnitř válce a atmosférický tlak p_a. Tlaková síla plynu $F_p = (p - p_a)\,S$. Jelikož děj v plynu ve válci je adiabatický, platí

$$pV^\kappa = p_0 V_0^\kappa \quad\Rightarrow\quad p = p_0\left(\frac{l}{l-x}\right)^\kappa = p_0\left(1-\frac{x}{l}\right)^{-\kappa} \approx p_0\left(1+\frac{\kappa}{l}x\right),$$

a tedy výsledná tlaková síla směrem dolů je

$$F_p = (p_a - p)\,S = \left[p_a - \left(p_0 + \kappa\frac{p_0}{l}x\right)\right] S = -m_2 g - \kappa\frac{p_0 S}{l}x.$$

Při výchylce x z počáteční polohy vykoná vzduch (ve válci i vně) na soustavu pístu a bedničky práci

$$W_p = \int_0^x F_p \mathrm{d}x = -m_2 g x - \int_0^x \frac{\kappa p_0 S}{l} x \mathrm{d}x = -m_2 g x - \frac{\kappa p_0 S}{2l}x^2.$$

Kromě toho vykoná tíhová síla práci

$$W_g = (m_1+m_2)\,gx.$$

Během stlačování plynu klesá kinetická energie pístu s bedničkou. Při maximální výchylce x_m je kinetická energie nulová, proto platí

$$\Delta E_k = W_g + W_p \quad\Rightarrow\quad 0 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)\,v_1^2 = m_1 g x_m - \frac{\kappa p_0 S}{2l}x_m^2.$$

Kvadratickou rovnici upravíme na tvar

$$x_m^2 - 2\frac{m_1 g l}{\kappa p_0 S}x_m - \frac{(m_1+m_2)\,v_1^2 l}{\kappa p_0 S} = 0.$$

Její řešení je

$$x_m = \frac{m_1 g l}{\kappa p_0 S} + \sqrt{\left[\frac{m_1 g l}{\kappa p_0 S}\right]^2 + \frac{2 m_1^2 g (h-l-b) l}{\kappa p_0 S (m_1+m_2)}},$$

resp.

$$x_m = \xi + \sqrt{\xi^2 + \frac{2m_1(h-l-b)\xi}{m_1+m_2}},$$

kde

$$\xi \equiv \frac{m_1 g l}{\kappa p_0 S} = \frac{m_1 g l}{\kappa\,(p_a S + m_2 g)}.$$

Pro dané hodnoty x_m=2,4 cm. **6 bodů**

c) Teplotu určíme pomocí stavové rovnice pro adiabatický děj v ideálním plynu

$$T = T_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\kappa-1} = T_0\left(\frac{l}{l-x_m}\right)^{\kappa-1}.$$

Pro dané hodnoty $T = 320$ K. **2 body**

2. a) Podle stavové rovnice je v bodě 1 teplota

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = 289 \text{ K}.$$

Děj 1–2 je izochorický, proto je ve stavu 2 teplota

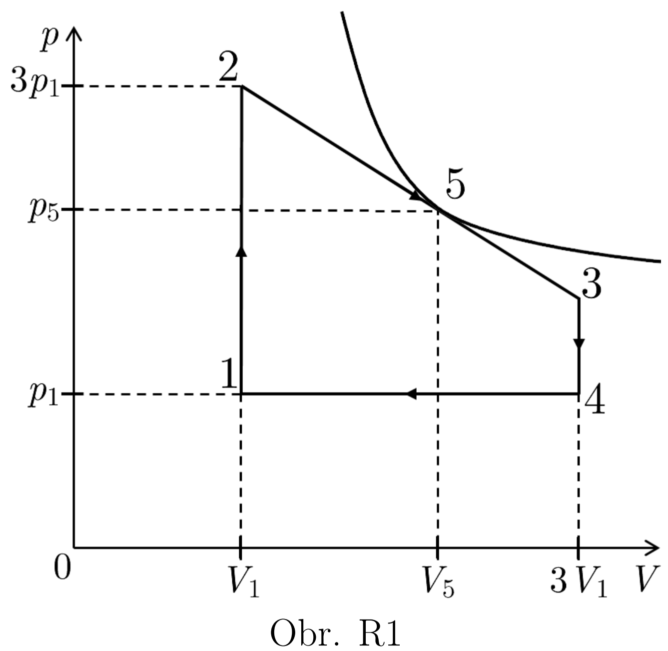
$$T_2 = \frac{p_2 T_1}{p_1} = \frac{3p_1 V_1}{nR} = 3T_1 = 866 \text{ K}.$$

Děj 4–1 je izobarický, teplota ve stavu 4 je

$$T_4 = \frac{V_4 T_1}{V_1} = \frac{3p_1 V_1}{nR} = 3T_1 = 866 \text{ K}.$$

Děj 3–4 je izochorický, teplota ve stavu 3 je

$$T_3 = \frac{p_3 T_4}{p_1} = \frac{3p_3 V_1}{nR} = \frac{4{,}2 p_1 V_1}{nR} = 1{,}4T_4 = 4{,}2T_1 = 1\,210 \text{ K}.$$



Obr. R1

Jelikož je teplota úměrná součinu pV, má plyn nejnižší teplotu ve stavu 1. Nejvyšší teplotu má ve stavu 5, který odpovídá bodu dotyku izotermy s úsečkou 2–3 (obr. R1).

Napíšeme-li rovnici izotermy $pV = nRT$ a rovnici přímky $p = aV + b$, kde a a b jsou konstanty, pak po dosazení z rovnice přímky do stavové rovnice dostaneme kvadratickou rovnici $aV^2 + bV - nRT = 0$. Protože se hyperbola dotýká přímky jen v jednom bodě, musí mít kvadratická rovnice jen jeden dvojnásobný kořen, a tedy její diskriminant bude roven nule:

$$b^2 + 4anRT = 0 \quad \Rightarrow \quad T = -\frac{b^2}{4naR}.$$

Konstanty a a b určíme z rovnic $3p_1 = aV_1 + b$ a $1{,}4p_1 = 3aV_1 + b$:

$$a = \frac{3p_1 - 1,4p_1}{V_1 - 3V_1} = -0{,}8\frac{p_1}{V_1},$$

$$b = \frac{3p_1 3V_1 - 1{,}4p_1V_1}{3V_1 - V_1} = 3{,}8p_1.$$

Nejvyšší teplota během kruhového děje

$$T_5 = -\frac{b^2}{4naR} = \frac{361p_1V_1}{80nR} = 4{,}5T_1 = 1\,300\ \text{K}.$$

4 body

Alternativní řešení: Vyjdeme z rovnice přímky 2–3:

$$p = p_1\left(3{,}8 - 0{,}8\frac{V}{V_1}\right).$$

Teplota je dána vztahem

$$T = \frac{pV}{nR} = T_1\left[3{,}8\frac{V}{V_1} - 0{,}8\left(\frac{V}{V_1}\right)^2\right],$$

což představuje konkávní parabolu. Její maximum najdeme nejsnáze derivací vztahu v závorce podle proměnné V/V_1:

$$3{,}8 - 2\cdot 0{,}8\frac{V_5}{V_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_5 = \frac{19}{8}V_1.$$

Odtud $T_5 = 4{,}5T_1 = 1\,300$ K.

b) Plyn přijímá teplo při ději 1–2 a v úseku 2–5. Proto musíme určit objem V_5 a tlak p_5. Objem můžeme určit řešením kvadratické rovnice $aV^2 + bV - nRT = 0$,

$$V_5 = \frac{-b \pm 0}{2a} = \frac{19}{8}V_1$$

a tlak potom z rovnice

$$p_5 = aV_5 + b = \frac{19}{10}p_1.$$

Přijatá tepla jsou

$$Q_{12} = \Delta U = \frac{3}{2} nR\,(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}\,(3p_1 - p_1)\,V_1 = 3p_1V_1 = 3{,}6\ \text{kJ},$$

$$Q_{25} = \Delta U + W' = \frac{3}{2} nR\,(T_5 - T_2) + \frac{1}{2}\,(p_2+p_5)\,(V_5 - V_2) = 6{,}8\ \text{kJ}.$$

Celkem plyn přijme teplo $Q_{15} = Q_{12} + Q_{25} = 10{,}4$ kJ. **3 body**

Zkrácený výpočet:

$$Q_{15} = \Delta U_{15} + W'_{15} = \frac{3}{2}\,(p_5V_5 - p_1V_1) + \frac{p_2 + p_5}{2}\,(V_5 - V_1) = 8{,}6\ p_1V_1 = 10{,}4\ \text{kJ}.$$

c) Pro energetické veličiny platí

$$Q_{15} = Q_{12} + Q_{25} = \Delta U_{12} + \Delta U_{25} + W'_{25} = \Delta U_{15} + W'_{25}$$

(sloučením přírůstků vnitřní energie do jedné již nemusíme použít T_2). Pro změnu vnitrní energie platí

$$\Delta U_{15} = \frac{3}{2} nR\,(T_5 - T_1) = \frac{3}{2} nR\left(\frac{361}{80}T_1 - T_1\right) = \frac{843}{160} nRT = \frac{843}{160} p_1V_1.$$

Dále vyjádříme

$$W'_{25} = \frac{p_2 + p_5}{2}\,(V_5 - V_1) = \frac{3p_1 + \frac{19}{10}p_1}{2}\left(\frac{19}{8}V_1 - V_1\right) = \frac{49}{20}p_1 \cdot \frac{11}{8}V_1 = \frac{539}{160}p_1V_1,$$

$$Q_{15} = \frac{843}{160}p_1V_1 + \frac{539}{160}p_1V_1 = \frac{691}{80}p_1V_1,$$

$$W' = \frac{2p_1 + 0{,}4p_1}{2}\,(3V_1 - V_1) = \frac{12}{5}p_1V_1,$$

$$\eta = \frac{W'}{Q_{15}} = \frac{\frac{12}{5}p_1V_1}{\frac{691}{80}p_1V_1} = \frac{192}{691} = 0{,}28 = 28\ \%.$$ **3 body**

Poznámka: Někteří soutěžící možná vypočtou práci, kterou plyn vykonal během kruhového děje, z obsahu lichoběžníka 1234:

$$W' = \frac{1}{2}\,(2p_1 + 0{,}4p_1)\,2V_1 = 2{,}4p_1V_1 = 2{,}9\ \text{kJ}.$$

Účinnost kruhového děje

$$\eta = \frac{W'}{Q_{15}} = 0{,}28 = 28\ \%.$$

3. a) Potenciál pole vně objemu, vymezeného nabitou kulovou plochou, má stejný průběh jako potenciál stejně velkého bodového náboje, umístěného v jejím středu. Uvnitř kulové plochy je potenciál konstantní.
Potenciál na vnějším povrchu kulových ploch určíme podle principu superpozice. Potenciál každé plochy je určen nejen nábojem plochy samotné, ale nábojem všech ploch.

Potenciál na povrchu vnitřní plochy:

$$\varphi_1 = k\frac{Q}{r} + k\frac{4Q}{2r} - k\frac{2Q}{4r} = \frac{5}{2}k\frac{Q}{r}.$$

Potenciál na povrchu prostřední plochy:

$$\varphi_2 = k\frac{Q}{2r} + k\frac{4Q}{2r} - k\frac{2Q}{4r} = 2k\frac{Q}{r}.$$

Potenciál na povrchu vnější plochy:

$$\varphi_3 = k\frac{Q}{4r} + k\frac{4Q}{4r} - k\frac{2Q}{4r} = \frac{3}{4}k\frac{Q}{r}.$$

Potenciál v bodě A:

$$\varphi_A = k\frac{Q}{3r} + k\frac{4Q}{3r} - k\frac{2Q}{4r} = \frac{7}{6}k\frac{Q}{r}.$$

2 body

Intenzity elektrických polí na povrchu ploch určíme superpozicí vektorů intenzit. Protože intenzita je vektor kolmý k ploše, můžeme intenzity skládat algebraicky. Uvnitř plochy je intenzita jejího elektrického náboje nulová.
Na vnějším povrchu první plochy je intenzita elektrického pole

$$E_1 = k\frac{Q}{r^2}.$$

Na vnějším povrchu druhé plochy je intenzita elektrického pole

$$E_2 = k\frac{Q}{4r^2} + k\frac{4Q}{4r^2} = \frac{5}{4}k\frac{Q}{r^2}.$$

Na vnějším povrchu třetí plochy je intenzita elektrického pole:

$$E_3 = k\frac{Q}{16r^2} + k\frac{4Q}{16r^2} - k\frac{2Q}{16r^2} = \frac{3}{16}k\frac{Q}{r^2}.$$

Intenzita elektrického pole v bodě A je

$$E_A = k\frac{Q}{9r^2} + k\frac{4Q}{9r^2} = \frac{5}{9}k\frac{Q}{r^2}.$$

2 body

b) Propojením druhé a třetí plochy se vyrovnají jejich potenciály,

$$\varphi_2' = \varphi_3', \tag{1}$$

a pro náboje obou ploch platí zákon zachování náboje:

$$Q_2' + Q_3' = Q_2 + Q_3 \quad \Rightarrow \quad Q_2' + Q_3' = 2Q.$$

Náboj první plochy se nezmění: $Q_1' = Q_1 = Q$.
Přepíšeme rovnici (1):

$$k\frac{Q}{2r} + k\frac{Q_2'}{2r} + k\frac{Q_3'}{4r} = k\frac{Q}{4r} + k\frac{Q_2'}{4r} + k\frac{Q_3'}{4r} \quad \Rightarrow \quad Q_2' = -Q \ a \ Q_3' = 3Q.$$

3 body

c) Intenzita elektrického pole v bodě D, který leží na povrchu dielektrika v kontaktu s první kulovou plochou, je

$$E_D = k\frac{Q}{r^2} + k\frac{Q_{p1}}{r^2},$$

a současně také

$$E_D = k\frac{Q}{\varepsilon_r r^2}.$$

Porovnáním určíme náboj v blízkosti vnitřní plochy:

$$k\frac{Q}{r^2} + k\frac{Q_{p1}}{r^2} = k\frac{Q}{\varepsilon_r r^2} \quad \Rightarrow \quad Q_{p1} = Q\frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r}.$$

V blízkosti vnější plochy je vázaný náboj Q_{p2}, pro který platí $Q_{p1} + Q_{p2} = 0$. Odtud

$$Q_{p2} = Q\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}.$$

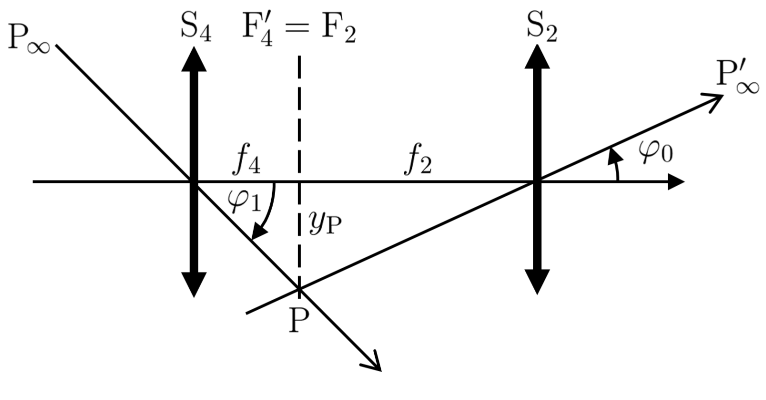
3 body

4. a) Ze vztahu pro sčítání optických mohutností tenkých čoček těsně u sebe dostáváme

$$f_4 = \frac{f_1 f_3}{f_1 + f_3}.$$

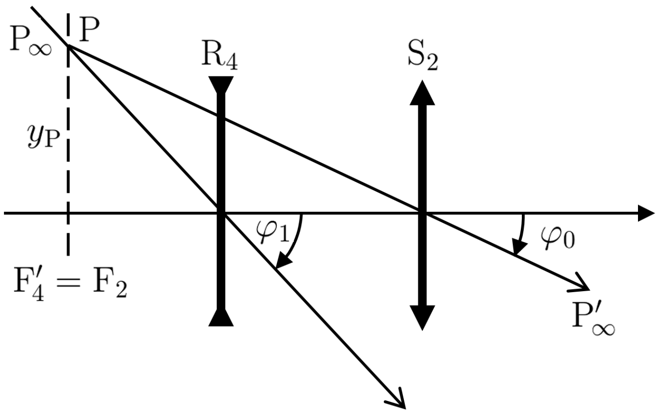
Svazek rovnoběžných paprsků, vycházejících z bodu P_∞ v nekonečnu, vytvoří po průchodu složenou čočkou S$_1$-R obraz P v její obrazové ohniskové rovině. Mají-li paprsky z bodu P vycházet z čočky S$_2$ opět jako rovnoběžné, musí bod P současně ležet v předmětové ohniskové rovině čočky S$_2$, tj. musí být $F_4' = F_2$ (teleskopická soustava).

Je-li $f_4 > 0$, představuje složená čočka S$_1$-R spojku. Průchod paprsků soustavou dvou spojek znázorňuje obr. R2. Složená čočka je označena S$_4$. Jak je z obrázku zřejmé, úhel φ_0, který paprsky vycházející ze soustavy svírají s optickou osou, má opačnou orientaci než úhel φ_1, pod kterým paprsky do soustavy vstupují. Soustava dvou spojek tak nesplňuje jeden z požadavků zadání.



Obr. R2

Pro $f_4 < 0$ je složená čočka S$_1$-R rozptylkou. Průchod paprsků zachycuje obr. R3. Složená čočka je označena R$_4$. V tomto případě mají oba úhly φ_0 a φ_1 shodnou orientaci.



Obr. R3

Podmínky úlohy jsou splněny pro $f_4 < 0$ a vzdálenost čoček $f_2 - |f_4| = d$, tj. pokud

$$f_1 + f_3 > 0 \ \text{ a } \ f_2 + \frac{f_1 f_3}{f_1 + f_3} = d. \tag{1}$$

Poměr tangent úhlů pro vstupující a vystupující svazek dostáváme z obrázku:

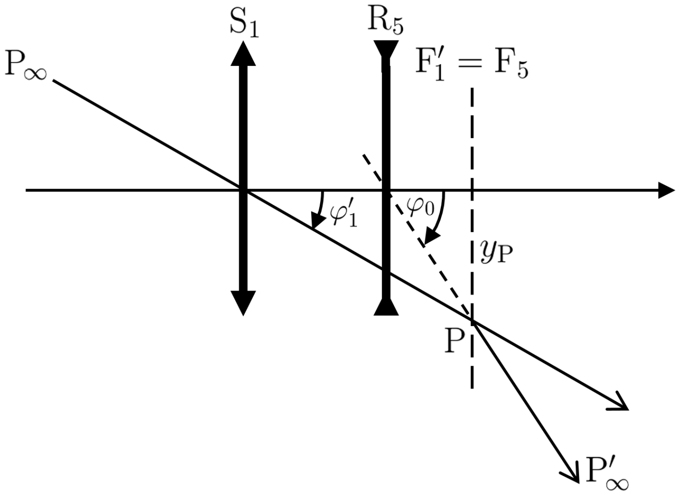
$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_0} = \frac{\dfrac{y_P}{|f_4|}}{\dfrac{y_P}{f_2}} = -\frac{f_2}{f_4} = -\frac{f_2\,(f_1 + f_3)}{f_1 f_3}. \tag{2}$$

3 body

b) Postupujeme analogicky jako při řešení úlohy a). Ohnisková vzdálenost spojených čoček R-S$_2$ je

$$f_5 = \frac{f_2 f_3}{f_2 + f_3}.$$

V grafickém znázornění průchodu paprsků na obr. R4 je již vzato v potaz, že spojené čočky R-S$_2$ tvoří rozptylku R$_5$ a že $F_1' = F_5$.



Obr. R4

Z podmínek $f_5 < 0$ a $f_1 - |f_5| = d$ dostáváme

$$f_2 + f_3 > 0 \ \text{ a } \ f_1 + \frac{f_2 f_3}{f_2 + f_3} = d. \tag{3}$$

Poměr tangent úhlů vstupujícího a vystupujícího svazku paprsků je

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_1'}{\operatorname{tg}\varphi_0} = \frac{\dfrac{y_P}{f_1}}{\dfrac{y_P}{|f_5|}} = -\frac{f_2 f_3}{f_1\,(f_2+f_3)}. \tag{4}$$

3 body

c) Z rovnic (1) a (3) vyjádříme f_2 a f_3 pomocí f_1,

$$f_2 = f_1, \quad f_3 = \frac{f_1\,(f_1-d)}{d-2f_1}. \tag{5}$$

Z podílu (2) a (4) dostaneme

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_1'} = \left(\frac{f_1}{f_1-d}\right)^2 .$$

Podíl může být roven n ($\varphi_{1\,\max} = \varphi_1$), nebo $1/n$ ($\varphi_{1\,\max} = \varphi_1'$). Jak je patrné z obrázků R3 a R4, je $\varphi_1 > \varphi_0 > \varphi_1'$, tudíž $\varphi_{1\,\max} = \varphi_1$, $\varphi_{1\,\min} = \varphi_1'$. Tedy

$$\frac{f_1}{f_1-d} = \kappa, \tag{6}$$

kde $\kappa = \pm\sqrt{n}$. Z rovnic (5) a (6) obdržíme

$$f_1 = f_2 = \frac{\kappa d}{\kappa - 1}, \quad f_3 = -\frac{\kappa d}{\kappa^2 - 1}.$$

Vzhledem k požadovaným nerovnostem $f_1 + f_3 > 0$, $f_1 > 0$, $f_3 < 0$, dostaneme přípustné řešení pouze pro $\kappa = +\sqrt{n}$:

$$f_1 = f_2 = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}d, \quad f_3 = -\frac{\sqrt{n}}{n-1}d.$$

3 body

Číselně $f_1 = f_2 = 9{,}5$ cm, $f_3 = -3{,}5$ cm. **1 bod**