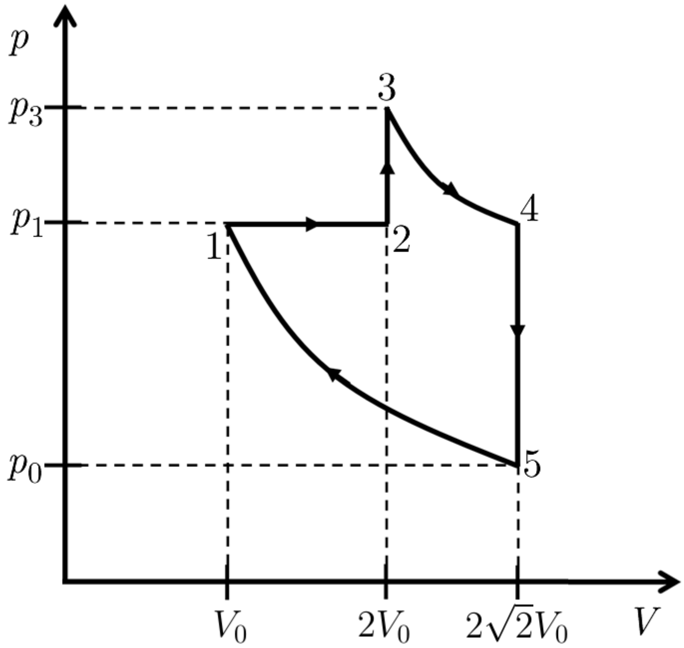
Řešení úloh 2. kola 65. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Úlohy navrhli J. Thomas (1, 2, 3) a J. Jírů (4)

1.a) Kruhový děj překreslíme do pV-diagramu:



Obr. R1

1 bod

Z grafu vidíme, že nejnižší teplota je ve stavech 1 a 5: $T_1 = T_5 = T_0 = 300$ K a nejnižší tlak je ve stavu 5, tedy $p_5 = p_0$. **0,5 bodu**

Při izobarickém ději 1–2 se objem dvakrát zvětší, dvakrát se tedy zvětší i teplota $T_2 = 2T_0 = 600$ K. **0,5 bodu**

Z Boyleova-Mariottova zákona pro izotermický děj 5–1 určíme tlak p_1:

$$p_1 V_0 = p_0 2\sqrt{2} V_0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = 2\sqrt{2} p_0 = 0{,}28 \text{ MPa},$$

a protože body 2 a 4 leží na stejné izobaře rovněž

$$p_2 = p_4 = p_1 = 2\sqrt{2} p_0 = 0{,}28 \text{ MPa}.$$ **1 bod**

Děj 4 – 5 je izochorický, proto

$$\frac{p_4}{p_0} = \frac{T_4}{T_0} \quad \Rightarrow \quad T_4 = T_3 = 2\sqrt{2} T_0 = 849 \text{ K}.$$ **0,5 bodu**

Z Boyleova-Mariottova zákona pro izotermický děj 3–4 určíme tlak p_3:

$$p_3 2V_0 = p_4 2\sqrt{2} V_0 = 8 p_0 V_0 \quad \Rightarrow \quad p_3 = 4 p_0 = 0{,}4 \text{ MPa}.$$ **0,5 bodu**

b) Plyn koná práci při ději 1–2 a při ději 3–4.

$$W'_{12} = p_1 V_0 = 2\sqrt{2} p_0 V_0 = nRT_0$$

při ději 3–4 bude vykonaná práce

$$W'_{34} = nRT_3 \ln\sqrt{2} = nR2\sqrt{2}T_0 \ln\sqrt{2} = p_3 2V_0 \ln\sqrt{2} = 8 p_0 V_0 \ln\sqrt{2},$$

$$\frac{W'_{34}}{W'_{12}} = \frac{8 p_0 V_0 \ln\sqrt{2}}{2\sqrt{2} p_0 V_0} = \frac{4 \ln\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \ln\sqrt{2} = 0{,}98.$$

Větší práci tedy plyn vykoná při ději 1–2. **3 body**

c) K určení účinnosti kruhového děje musíme znát jednak velikosti prací, které plyn koná při dějích 1–2, 3–4 a 5–1, jednak velikost plynu dodaného tepla při dějích 1–2, 2–3 a 3–4.

Při ději 5–1 plyn přijme práci

$$W_{51} = p_0 2\sqrt{2} V_0 \ln\left(2\sqrt{2}\right) = nRT_0 \ln\left(2\sqrt{2}\right).$$

Při izobarické expanzi plyn přijme teplo

$$Q_{12} = \frac{7}{2} nR\left(T_2 - T_1\right) = \frac{7}{2} nRT_0.$$

Při izochorickém zahřátí plyn přijme teplo

$$Q_{23} = \frac{5}{2} nR\left(T_3 - T_2\right) = \frac{5}{2} nR2(\sqrt{2} - 1)T_0 = 5(\sqrt{2} - 1)nRT_0.$$

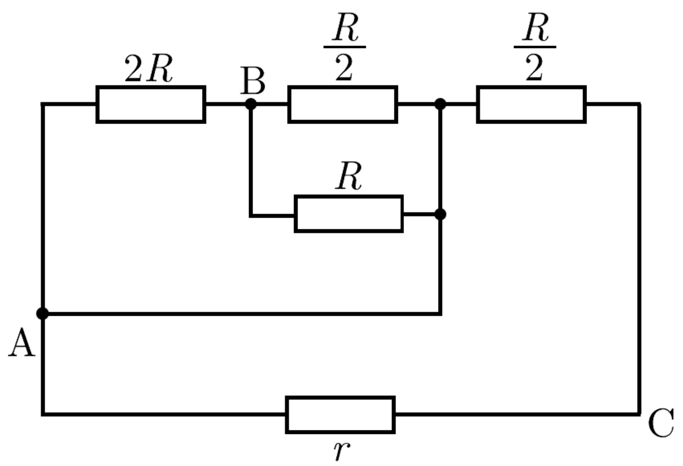
Při izotermické expanzi plyn přijme teplo

$$Q_{34} = W'_{34} = nR2\sqrt{2}T_0 \ln\sqrt{2}.$$

Pro účinnost děje platí:

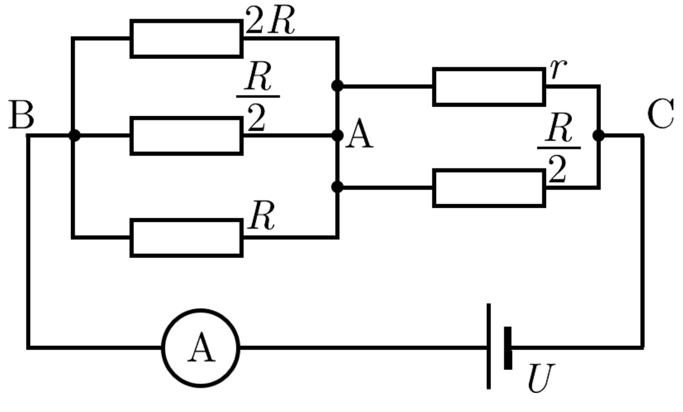
$$\eta = \frac{W'_{12} + W'_{34} - W_{51}}{Q_{12} + Q_{23} + Q_{34}} = \frac{1 + 2\sqrt{2}\ln\sqrt{2} - \ln(2\sqrt{2})}{\frac{7}{2} + 5(\sqrt{2} - 1) + 2\sqrt{2}\ln\sqrt{2}} = 0{,}14.$$ **3 body**

2. a) Překreslíme schéma před připojením zdroje s ampérmetrem:



Obr. R2

Po připojení zdroje s ampérmetrem k bodům B a C:



Obr. R3

Odpor mezi body B a C:

$$R_{\mathrm{BC}} = R_{\mathrm{BA}} + R_{\mathrm{AC}} = \frac{1}{\dfrac{1}{2R} + \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{\frac{R}{2}}} + \frac{r\frac{R}{2}}{r + \frac{R}{2}} = \frac{1}{\dfrac{1+2+4}{2R}} + \frac{r \cdot R}{2r + R} =$$

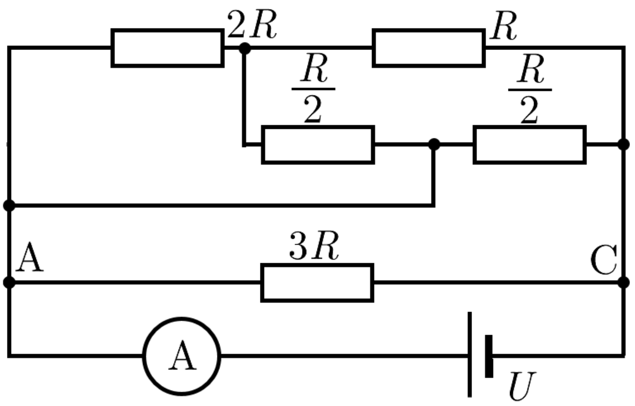
$$= \frac{2R}{7} + \frac{r \cdot R}{2r + R} = \frac{U}{I_1} = \frac{5}{7}\mathrm{k}\Omega = \frac{5}{7}R.$$

Po zkrácení vyřešíme rovnici

$$\frac{2}{7} + \frac{r}{2r + R} = \frac{5}{7} \quad \Rightarrow \quad 7r = 6r + 3R \quad \Rightarrow \quad r = 3R = 3{,}0\ \mathrm{k}\Omega.$$

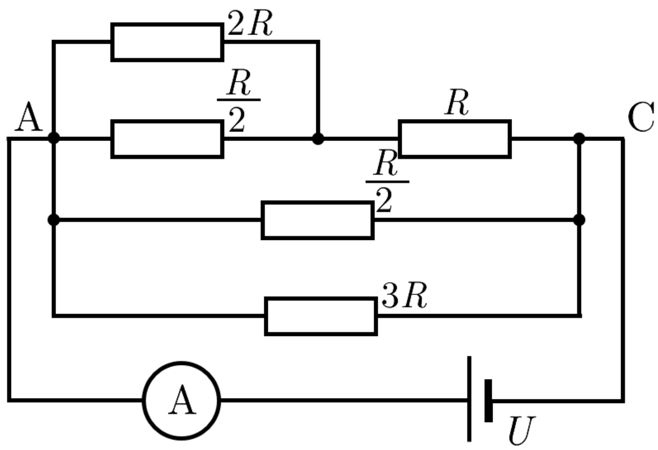
3 body

b) Znovu překreslíme schéma



Obr. R4

které můžeme ještě upravit na



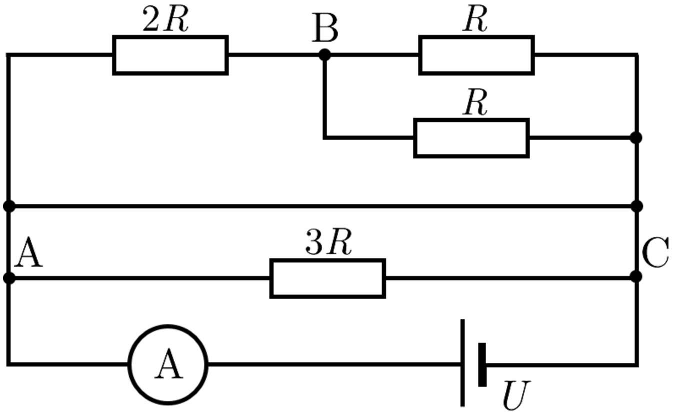
Obr. R5

Celkový odpor mezi body A a C je

$$R_{\mathrm{AC}} = \frac{1}{\dfrac{5}{7R} + \dfrac{2}{R} + \dfrac{1}{3R}} = \frac{21}{64}R.$$

Ampérmetr ukáže proud $I_2 = \dfrac{U}{\frac{21}{64}R} = 30{,}5\ \mathrm{mA}.$ **3 body**

c) Budou-li jezdci na obou reostatech v pravé krajní poloze, změní se zapojení na

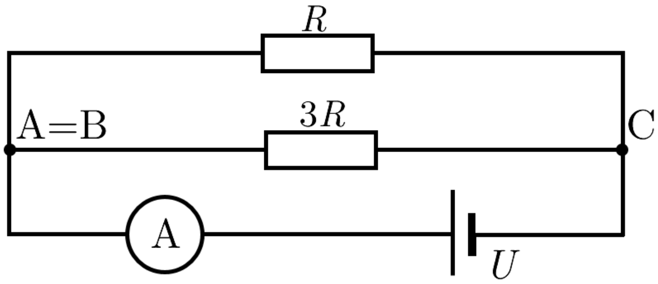


Obr. R6

Nastane zkrat (definovaný nulovým odporem), proud obvodem bude maximální.

2 body

Budou-li jezdci na obou reostatech v levé krajní poloze, nebude dolním reostatem ani odporem $2R$ procházet proud. Zapojení se změní na



Obr. R7

Celkový odpor bude $R_3 = \frac{3}{4}R$ a proud $I_3 = \frac{U}{R_3} = \frac{4U}{3R} = 13$ mA. **2 body**

3.a) Pro dobu t letu náboje vystřeleného z hladké hlavně rychlostí v_1 k terči platí

$$t = \frac{d}{v_1} = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{gd^2}{2h_1}}.$$

Obdobně dostaneme konečnou rychlost náboje z rýhované hlavně

$$v_2 = \sqrt{\frac{gd^2}{2h_2}}.$$

Poměr rychlostí je

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}.$$

Spálením prachové náplně získá střela v hladké hlavni kinetickou energii

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2}.$$

V rýhované hlavni se část energie dodané prachovou náplní spotřebuje na roztočení střely. Střela má stejně velkou konečnou kinetickou energii

$$E_2 = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{kmR^2\omega^2}{2} = E_1.$$

Náboj urazí v hlavni posuvným pohybem dráhu L. Současně rotací náboje jeho dotykové body s hlavní opíší po kružnici dráhu $N \cdot 2\pi R$. Poměr těchto drah je v libovolném okamžiku roven poměru okamžité rychlosti posuvného pohybu a okamžité obvodové rychlosti dotykových bodů při rotačním pohybu. Tedy v okamžiku opuštění hlavně platí

$$\frac{L}{2\pi NR} = \frac{v_2}{R\omega} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi N}{L} v_2.$$

Dosazením získané úhlové rychlosti ω do vztahu pro energii E_2 dostaneme

$$E_2 = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{kmR^2}{2} \cdot \frac{4\pi^2 N^2}{L^2} v_2^2.$$

Z rovnosti energií $E_1 = E_2$ plyne

$$v_1^2 = v_2^2 + k\frac{4\pi^2 N^2 R^2}{L^2} v_2^2 \quad \Rightarrow \quad L = \sqrt{k}\frac{2\pi NR}{\sqrt{\frac{v_1^2}{v_2^2} - 1}}.$$

Užijeme známý poměr rychlostí. Hlaveň má délku

$$L = \sqrt{k} \cdot \frac{2\pi NR}{\sqrt{\frac{h_2}{h_1} - 1}} = \sqrt{k} \cdot 2\pi NR\sqrt{\frac{h_1}{h_2 - h_1}} = 12 \text{ cm}.$$

6 bodů

b) Máme určit velikost rychlosti náboje z rýhované hlavně:

$$v_2 = \sqrt{\frac{gd^2}{2h_2}} = 290 \ \text{m} \cdot \ \text{s}^{-1}.$$

2 body

Určíme podíl

$$\frac{E_{\text{rot}}}{E_1} = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2}{\frac{1}{2}mv_1^2} = 1 - \frac{v_2^2}{v_1^2} = 1 - \frac{h_1}{h_2} = \frac{h_2 - h_1}{h_2} = \frac{7}{23} = 0{,}30$$

2 body

4.a) Označme m hmotnost výplně válcové dutiny z materiálu stejné hustoty ρ a h výšku válce. Pak platí

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2 h - \pi r^2 h} = \frac{m}{\pi r^2 h} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{r^2}{R^2 - r^2} M = \frac{\left(\frac{R}{2}\right)^2}{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} M = \frac{M}{3}.$$

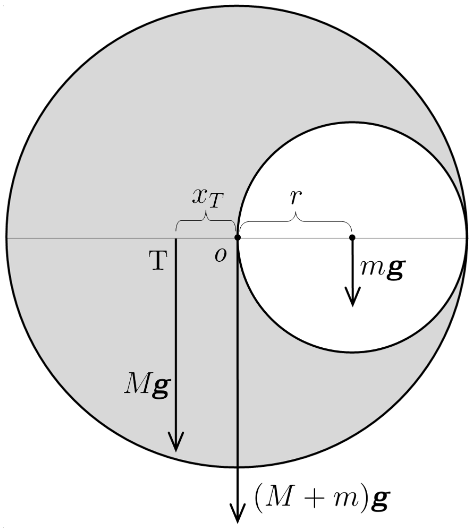
Užitím Steinerovy věty určíme moment setrvačnosti vyplněné válcové dutiny vzhledem k ose o velkého válce:

$$J_v = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{M}{3} \cdot \frac{R^2}{4} = \frac{1}{8}MR^2.$$

Moment setrvačnosti válce s dutinou vzhledem k ose o získáme rozdílem momentů setrvačnosti plného válce a vyplněné válcové dutiny

$$J_o = \frac{1}{2}\left(M + \frac{M}{3}\right) R^2 - \frac{1}{8} M R^2 = \frac{13}{24} M R^2 = 0{,}042\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2.$$

4 body



Obr. R8

b) Označme x_T vzdálenost těžiště T válce s dutinou od osy o. Vzhledem k ose o musí být v rovnováze moment tíhové síly daného válce s dutinou a moment tíhové síly válcové výplně

$$M g x_T = m g r.$$

Z rovnice plyne

$$x_T = \frac{m}{M} r = \frac{m}{3m} \cdot \frac{R}{2} = \frac{R}{6}.$$

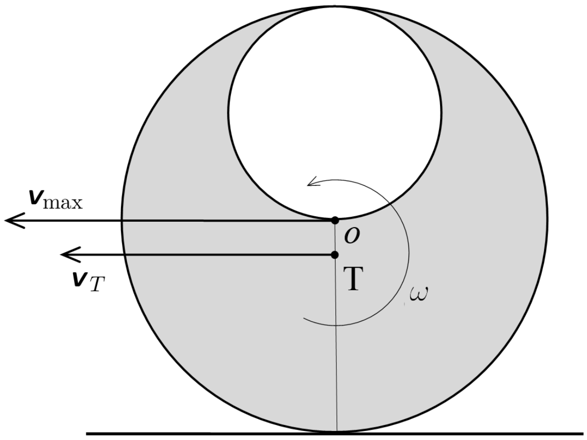
Ze Steinerovy věty

$$J_o = J_T + M x_T^2$$

plyne

$$J_T = J_o - M x_T^2 = \frac{13}{24} M R^2 - M \frac{R^2}{36} = \frac{37}{72} M R^2 = 0{,}039\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2.$$

2 body



Obr. R9

c) Valící se válec (osa o) dosáhne maximální okamžité rychlosti $v_{\max}$ v okamžiku průchodu těžiště T nejnižší možnou polohou. Pro potřeby užití ZZME si v tomto okamžiku pohyb válce rozložíme na posuvný pohyb těžiště a na rotační pohyb válce kolem osy procházející těžištěm rovnoběžně s osou o. Těžiště má vzhledem k podložce okamžitou rychlost

$$v_T = \frac{R - \frac{R}{6}}{R} v_{\max} = \frac{5}{6} v_{\max}$$

a válec vzhledem k těžišti úhlovou rychlost

$$\omega = \frac{v_{\max} - \dfrac{5}{6} v_{\max}}{\dfrac{R}{6}} = \frac{v_{\max}}{R}.$$

Poznámka: Pohyb válce můžeme také rozložit na posuvný pohyb dotykové přímky válce s podložkou a na rotační pohyb válce kolem této přímky. Pak úhlová rychlost otáčení je $\omega = \frac{v_{\max}}{R}$ a okamžitá rychlost vzhledem k podložce

$$v_T = \frac{5}{6} R\omega = \frac{5}{6} v_{\max}.$$

Kinetická energie válce v uvažované poloze je

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} M v_\mathrm{T}^2 + \frac{1}{2} J_\mathrm{T} \omega^2 = \frac{1}{2} M \cdot \frac{25}{36} v_{\max}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{37}{72} M R^2 \cdot \frac{v_{\max}^2}{R^2} = \frac{29}{48} M v_{\max}^2.$$

Přejde-li těžiště z nejvyšší do nejnižší polohy, zmenší se potenciální energie válce o hodnotu

$$\Delta E_\mathrm{p} = Mg \cdot 2x_T = \frac{1}{3} MgR.$$

Do rovnosti $E_\mathrm{k} = \Delta E_\mathrm{p}$ vyjádřené energie dosadíme

$$\frac{29}{48} M v_{\max}^2 = \frac{1}{3} MgR$$

a pro hledanou maximální rychlost dostaneme

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{16}{29} gR} = 0{,}66 \ \ \mathrm{m} \cdot \ \mathrm{s}^{-1}.$$

4 body