**Řešení úloh 2. kola 65. ročníku fyzikální olympiády.** *Kategorie D*

Úlohy navrhl J. Jírů

**1.**a) Označme pro předěly pohybu při rozjíždění: $t_1 = 10$ s, $t_2 = 25$ s, $t_3 = 50$ s, $v_1 = 7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_2 = 13\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_3 = 17\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Pak na jednotlivých úsecích platí:

$$a_1 = \frac{v_1}{t_1} = \frac{7}{10}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 0{,}70\ \mathrm{m\cdot s^{-2}},$$

$$a_2 = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{13-7}{25-10}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = \frac{2}{5}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 0{,}40\ \mathrm{m\cdot s^{-2}},$$

$$a_3 = \frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2} = \frac{17-13}{50-25}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = \frac{4}{25}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 0{,}16\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

**3 body**

b) Určíme celkovou dráhu jako obsah plochy pod grafem na časovém intervalu $t \in \langle 0\ \mathrm{s}; 50\ \mathrm{s}\rangle$:

$$s_c = \left(\frac{7\cdot 10}{2}\right)\ \mathrm{m} + \left(7\cdot 15 + \frac{6\cdot 15}{2}\right)\ \mathrm{m} + \left(13\cdot 25 + \frac{4\cdot 25}{2}\right)\ \mathrm{m} = 560\ \mathrm{m}.$$

Průměrná rychlost vlaku během rozjezdu pak je

$$v_p = \frac{s_c}{t_3} = \frac{560}{50}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 11\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

**3 body**

Pro rovnoměrně zpomalený pohyb do zastavení v c) a d) použijeme stejné výchozí vztahy jako pro rovnoměrně zrychlený pohyb z klidu: $s = \frac{1}{2}at^2,\ v = at$.

c)

$$a' = \frac{v_3}{t_3} = \frac{17}{50}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 0{,}34\ \mathrm{m\cdot s^{-2}},$$

$$s' = \frac{v_3 t_3}{2} = \frac{17\cdot 50}{2}\ \mathrm{m} = 425\ \mathrm{m},$$

**2 body**

d)

$$a'' = \frac{v_3^2}{2s_c} = \frac{17^2}{2\cdot 560}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 0{,}26\ \mathrm{m\cdot s^{-2}},$$

$$t'' = \frac{2s_c}{v_3} = \frac{2\cdot 560}{17}\ \mathrm{s} = 66\ \mathrm{s}.$$

**2 body**

**2.**a) Během každého pádu a během každého výstupu platí zákon zachování mechanické energie. Při prvním pádu a při prvním výstupu jsou splněny rovnice

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_1,$$

z nichž plyne

$$v_0 = \sqrt{2gh_0}, \quad v_1 = \sqrt{2gh_1}.$$

Koeficient restituce je

$$k = \frac{v_1}{v_0} = \frac{\sqrt{2gh_1}}{\sqrt{2gh_0}} = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} = 0{,}80.$$

**3 body**

b) Během druhého a třetího odrazu obdobně platí

$$k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = \sqrt{\frac{h_3}{h_2}}.$$

Ze vztahu plyne

$$h_2 = k^2 h_1 = \frac{h_1}{h_0} \cdot h_1 = \frac{h_1^2}{h_0} = 72 \text{ cm.}$$ **2 body**

$$h_3 = k^2 h_2 = \frac{h_1}{h_0} \cdot \frac{h_1^2}{h_0} = \frac{h_1^3}{h_0^2} = 46 \text{ cm.}$$ **2 body**

c) Po prvním odrazu míček vystoupá rovnoměrně zpomaleným pohybem do výšky $h_1$, poté z této výšky padá volným pádem, přičemž velikost zrychlení každého z obou pohybů je $g$. Proto míček polovinu hledané doby stoupá a druhou polovinu této doby padá. Ze vztahu

$$h_1 = \frac{1}{2} g \left(\frac{T}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} g T^2$$

dostaneme

$$T = \sqrt{\frac{8h_1}{g}} = 0{,}96 \text{ s.}$$ **3 body**

**3.**a) Kolotoč se otáčí s konstantní úhlovou rychlostí $\omega$, pro kterou platí

$$\omega = \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2}.$$

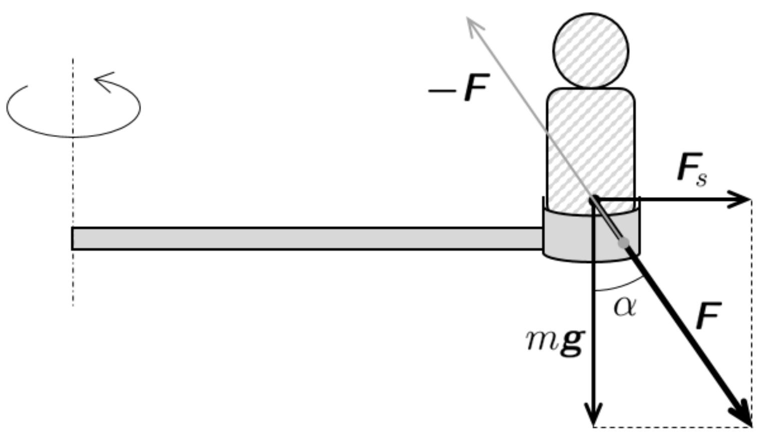
Ze vztahu plyne

$$v_2 = \frac{r_2}{r_1} v_1 = 4{,}5 \ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$ **2 body**

b) V soustavě spojené s kolotočem působí na jednotlivé osoby setrvačná odstředivá síla o velikosti

$$F_{s1} = \frac{m_1 v_1^2}{r_1} = 96 \text{ N},$$

$$F_{s2} = \frac{m_2 v_2^2}{r_2} = \frac{m_2}{r_2} \cdot \left(\frac{r_2}{r_1} v_1\right)^2 = \frac{m_2 r_2}{r_1^2} v_1^2 = 230 \text{ N.}$$ **2 body**




Obr. R1

c) V neinerciální vztažné soustavě spojené s kolotočem výslednice $\boldsymbol{F}$ tíhové síly $m\boldsymbol{g}$ a setrvačné odstředivé síly $\boldsymbol{F}_s$ tlačí osobu do sedačky, která reakcí $-\boldsymbol{F}$ působí zpětně na osobu (výslednice sil $m\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{F}_s$ a $-\boldsymbol{F}$ působící na osobu je nulová a osoba zůstává vzhledem ke kolotoči v klidu). V jednotlivých případech pro velikost síly působící na sedačku užitím Pythagorovy věty dostaneme (viz obr. R1)

$$F_1 = \sqrt{(m_1 g)^2 + \left(\frac{m_1 v_1^2}{r_1}\right)^2} = \sqrt{m_1^2 g^2 + \frac{m_1^2 v_1^4}{r_1^2}} = m_1 \sqrt{g^2 + \frac{v_1^4}{r_1^2}} = 260\ \text{N},$$

$$F_2 = \sqrt{m_2^2 g^2 + F_{s2}^2} = \sqrt{(m_2 g)^2 + \left(\frac{m_2 v_2^2}{r_2}\right)^2} = \sqrt{m_2^2 g^2 + \frac{m_2^2 v_2^4}{r_2^2}} =$$

$$= m_2 \sqrt{g^2 + \frac{1}{r_2^2} \cdot \frac{r_2^4}{r_1^4} v_1^4} = m_2 \sqrt{g^2 + \frac{r_2^2}{r_1^4} v_1^4} = 500\ \text{N}.$$

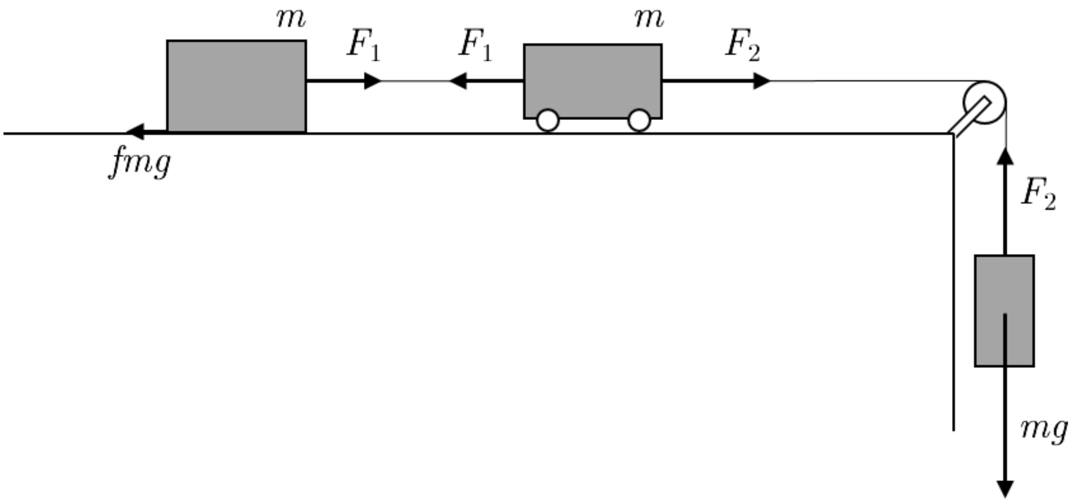
**3 body**

d) Pro odchylky $\alpha_1$ a $\alpha_2$ sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ od svislého směru platí

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{F_{s1}}{m_1 g} = \frac{\frac{m_1 v_1^2}{r_1}}{m_1 g} = \frac{v_1^2}{g r_1} = 0{,}393 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 21^\circ,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{F_{s2}}{m_2 g} = \frac{\frac{m_2 r_2}{r_1^2} v_1^2}{m_2 g} = \frac{r_2 v_1^2}{g r_1^2} = 0{,}524 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 28^\circ.$$

**3 body**




Obr. R2

**4.**a) Soustavu tří těles urychluje výslednice tíhové síly závaží a třecí síly působící na kvádr. Z pohybové rovnice soustavy

$$3ma = mg - fmg$$

plyne

$$a = \frac{1-f}{3} g = \frac{1 - 0{,}15}{3} \cdot 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = 2{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

**2 body**

b) Vlákno mezi kvádrem a vozíkem je napínáno silou, která současně urychluje kvádr a kompenzuje třecí sílu. Její velikost je

$$F_1 = ma + fmg = m \cdot \frac{1-f}{3} g + fmg = \frac{1+2f}{3} mg = 2{,}6 \text{ N}.$$

**3 body**

c) Vlákno mezi vozíkem a závažím je napínáno silou, která současně urychluje vozík s kvádrem a kompenzuje třecí sílu. Její velikost je

$$F_2 = 2ma + fmg = 2m \cdot \frac{1-f}{3} g + fmg = \frac{2+f}{3} mg = 4{,}2 \text{ N}.$$

**3 body**

*Poznámka:*

Části a) – c) lze řešit najednou tak, že pro každé těleso napíšeme pohybovou rovnici. Dostaneme soustavu tří rovnic s neznámými $a$, $F_1$, $F_2$:

$$ma = F_1 - fmg \text{ (pro kvádr)}$$
$$ma = F_2 - F_1 \text{ (pro vozík)}$$
$$ma = mg - F_2 \text{ (pro závaží).}$$

d) Hledáme minimální přirozené číslo $N$ splňující podmínku

$$Nfmg \geq mg.$$

Z podmínky plyne

$$N \geq \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}15} = \frac{20}{3}.$$

Minimální počet kvádrů je $N = 7$. **2 body**