Dopravní kinematika a grafy

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Přemysl Šedivý – Ivo Volf

Obsah

1 Základní pojmy dopravní kinematiky **2**
1.1 Poloha 2
1.2 Rychlost 3
1.3 Zrychlení 5

2 Grafy v dopravní kinematice **7**
2.1 Kinematika a grafické znázornění rovnoměrného pohybu 8
2.2 Modelování reálného pohybu pomocí rovnoměrných pohybů . . 11
2.3 Určení okamžité rychlosti z grafu dráhy při nerovnoměrném pohybu 16
2.4 Určení dráhy nerovnoměrného pohybu z grafu rychlosti 17
2.5 Kinematika a grafické znázornění rovnoměrně zrychleného a rovnoměrně zpomaleného pohybu 18
2.6 Modelování reálných pohybů pomocí rovnoměrných a rovnoměrně proměnných pohybů 20

Výsledky úloh **23**

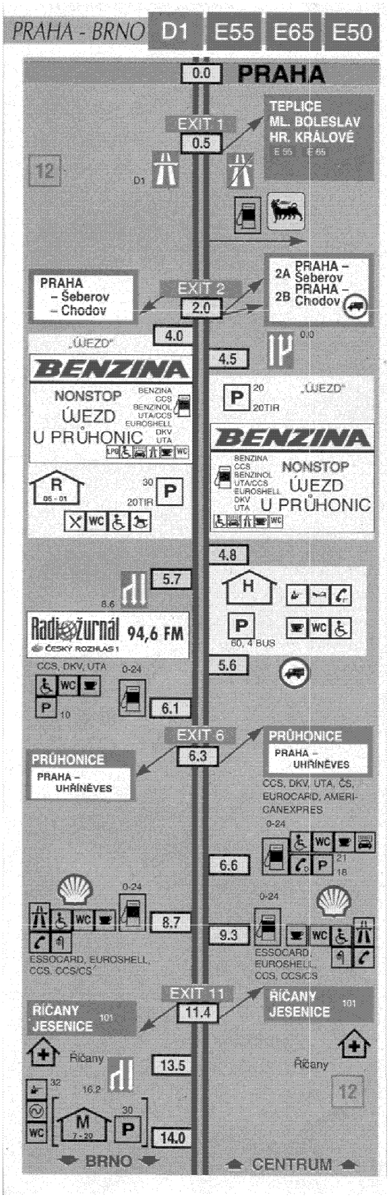
1 Základní pojmy dopravní kinematiky

1.1 Poloha

Pohyby dopravních prostředků – vlaků, silničních vozidel – po železničních tratích a silnicích popisujeme fyzikálně jako pohyby hmotných bodů vázaných na pevné trajektorie. Poloha takového hmotného bodu na trajektorii je dostatečně určena jedinou *souřadnicí* definovanou jako *vzdálenost* od určitého vztažného bodu. Abychom vystačili s kladnými souřadnicemi, volíme vztažný bod vždy na jednom konci železniční trati nebo silnice. Souřadnicemi jsou určeny také polohy význačných objektů rozmístěných podél trajektorie.

Například pro dálnici D1 Praha – Brno – Vyškov je vztažný bod na jejím začátku v Praze na Kačerově. Schéma této dálnice, které je v příloze automapy a jehož část je na obr. 1, nás informuje, že na souřadnici 0,5 km je křižovatka Spořilov s výjezdem na Teplice, Ml. Boleslav a Hr. Králové, na čtvrtém kilometru přijíždíme k prvnímu benzinovému čerpadlu. O něco dále bychom se dověděli, že výjezd na Štoky a Větrný Jeníkov má souřadnici přesně 100 km atd. Pro orientaci řidičů jsou v oddělovacím pruhu dálnice rozmístěny po každém 0,5 km tabulky s vyznačením souřadnice daného místa.

Vzdálenost na silnici samozřejmě neměříme „vzdušnou čarou“. Je to *délka trajektorie* mezi vztažným bodem a daným místem neboli *dráha*, kterou musí urazit vozidlo, aby se ze vztažného bodu dostalo do daného místa.



Obr. 1

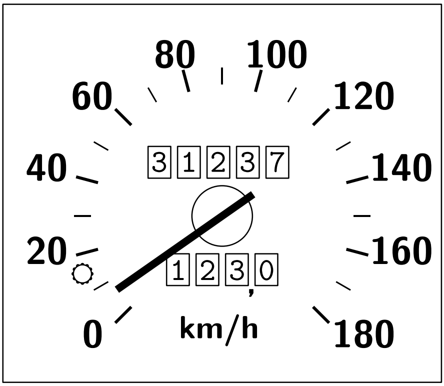
1.2 Rychlost

Řidič automobilu sleduje obvykle průběh jízdy pomocí náramkových hodinek a tachometru (rychloměru) umístěného na přístrojové desce před volantem (obr. 2). Jeho ručka ukazuje *velikost okamžité rychlosti* vozidla a na počítadle kilometrů čteme *celkovou dráhu* ujetou automobilem od jeho uvedení do provozu.

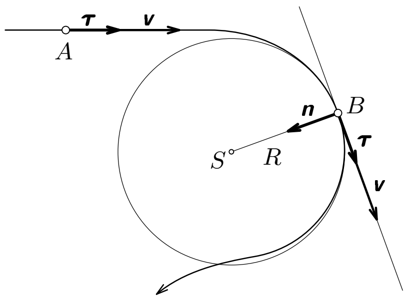
Z fyzikálního hlediska je okamžitá rychlost $\boldsymbol{v}$ automobilu vektorová veličina určená velikostí a směrem. Můžeme ji vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau}\,,$$

kde v je velikost okamžité rychlosti a $\boldsymbol{\tau}$ je *jednotkový směrový vektor* (obr. 3). Při přímočarém pohybu leží vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{\tau}$ v trajektorii (bod A), při křivočarém pohybu leží v tečně k trajektorii (bod B). Malý úsek křivé trajektorie můžeme vždy považovat za část kružnice určené *středem křivosti* S a *poloměrem křivosti* R. Jednotkový vektor $\boldsymbol{n}$ směřující do středu křivosti se nazývá *normálový vektor*.



Obr. 2



Obr. 3

Směr okamžité rychlosti vozidla je ovšem dán umístěním silnice v krajině, nemůžeme jej ovlivnit, a pokud nezabloudíme, většinou se o něj příliš nezajímáme. Za důležitou považujeme jen velikost okamžité rychlosti. Pro zjednodušení tedy v praxi obvykle říkáme, že na tachometru čteme *okamžitou rychlost* vozidla. Nemůže-li dojít k nejasnosti, vyjadřujeme se někdy takto zkráceně i ve fyzikálních úlohách.

Kontrolu tachometru můžeme jednoduše provést při jízdě stálou rychlostí, tedy *při rovnoměrném pohybu*. Jestliže údaj počítadla kilometrů vzroste z hodnoty s_1 v čase t_1 na hodnotu s_2 v čase t_2, platí

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}\,.$$

Příklad 1
Údaj počítadla kilometrů na tachometru se při jízdě stálou rychlostí zvětšil o 10 km za 7 minut a 20 sekund. Jak velká je rychlost automobilu?

Řešení
Při výpočtu můžeme použít hlavní jednotky SI, nebo počítat s jednotkami kilometr, hodina a kilometr za hodinu:

$$v = \frac{10\,000\ \mathrm{m}}{440\ \mathrm{s}} = 22{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 23\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,,$$

$$v = \frac{10\ \mathrm{km}}{\left(\dfrac{7}{60} + \dfrac{20}{3600}\right)\mathrm{h}} = 81{,}8\ \mathrm{km/h} \doteq 82\ \mathrm{km/h}\,.$$

V této a podobných úlohách dáme patrně přednost výsledku v km/h.

Nebude-li pohyb automobilu přesně rovnoměrný, získáme předcházejícím výpočtem pouze *průměrnou rychlost*

$$v_{\mathrm{p}} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}\,.$$

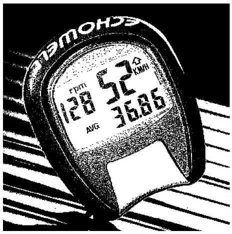
Novější tachometry jsou vybaveny i tzv. denním počítadlem kilometrů. To můžeme před jízdou vynulovat a měřit jen dráhu s dané jízdy. Použijeme-li pro měření jízdní doby t stopky, které spustíme v okamžiku startu, můžeme průměrnou rychlost jízdy určit z jednoduššího vztahu

$$v_{\mathrm{p}} = \frac{s}{t}\,.$$

Chceme-li určit okamžitou rychlost vozidla při nerovnoměrném pohybu, musíme změřit dobu Δt, za kterou projede vozidlo velmi malý přírůstek dráhy Δs. Výpočet zapisujeme ve tvaru

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{pro} \quad \Delta t \to 0 \qquad \left(\text{neboli} \quad v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,.\right)$$

Takto určují okamžitou rychlost *cyklocomputery* montované na sportovní kola (obr. 4), které ukazují na displeji podíl obvodu kola a doby jednoho oběhu změřené pomocí magnetického snímače. Tyto přístroje mají ovšem ještě řadu dalších funkcí. Vedle okamžité rychlosti mohou ukazovat i průměrnou rychlost od začátku jízdy, maximální rychlost, dobu jízdy, počet ujetých kilometrů od začátku jízdy nebo od doby uvedení computeru do provozu, frekvenci šlapání aj.



Obr. 4

1.3 Zrychlení

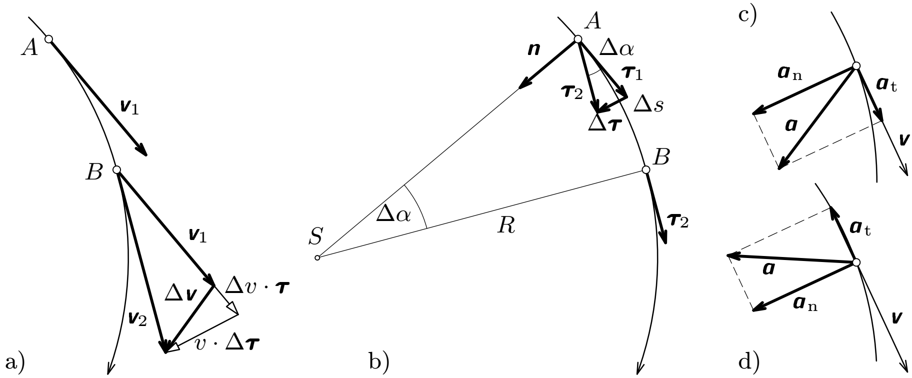
Během jízdy vozidla se mění velikost jeho okamžité rychlosti a v zatáčkách i její směr. Probereme si nejprve podle obr. 5 jízdu zatáčkou. Za dobu Δt se vozidlo přemístí z bodu A do bodu B a jeho rychlost se změní z $\boldsymbol{v}_1$ na $\boldsymbol{v}_2$. Bude-li doba Δt velmi krátká, změní se velikost i směr rychlosti jen nepatrně:

$$v_1 \doteq v_2 \doteq v\,, \qquad \Delta\alpha \ll 5^\circ\,.$$

V takovém případě můžeme z obr. 5a,b odvodit vztahy:

$$\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 = \Delta(v\cdot\boldsymbol{\tau}) = \Delta v\cdot\boldsymbol{\tau} + v\cdot\Delta\boldsymbol{\tau}\,,$$

$$\frac{|\Delta\boldsymbol{\tau}|}{|\boldsymbol{\tau}|} = \frac{|\Delta\boldsymbol{\tau}|}{1} = \Delta\alpha = \frac{\Delta s}{R} = \frac{v\,\Delta t}{R}\,, \qquad \Delta\boldsymbol{\tau} = \frac{v\,\Delta t}{R}\boldsymbol{n}\,.$$



Obr. 5

Okamžité zrychlení definované vztahem

$$\boldsymbol{a} = \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} \quad \text{pro} \quad \Delta t \to 0 \qquad \left(\text{neboli} \quad \boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right)$$

pak můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}\boldsymbol{\tau} + v\frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_\mathrm{t} + \boldsymbol{a}_\mathrm{n}\,.$$

Zrychlení při křivočarém pohybu můžeme tedy rozložit na dvě složky:

Tečné zrychlení $\quad \boldsymbol{a}_\mathrm{t} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}\boldsymbol{\tau} \quad$ má velikost $\quad |\boldsymbol{a}_\mathrm{t}| = a_\mathrm{t} = \left|\dfrac{\Delta v}{\Delta t}\right|\,.$

Určuje časovou změnu velikosti okamžité rychlosti. Jestliže se rychlost zvětšuje, je zlomek $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ kladný a tečné zrychlení má směr vektoru okamžité rychlosti (obr. 5c). Zmenšuje-li se rychlost, je zlomek $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ záporný a tečné zrychlení má opačný směr než vektor okamžité rychlosti (obr. 5d). Při rovnoměrném pohybu je tečné zrychlení nulové.

Normálové neboli *dostředivé zrychlení* $\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}} = \dfrac{v^2}{R}\boldsymbol{n}$ má velikost $|\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}| = a_n = \dfrac{v^2}{R}$ a míří vždy do středu křivosti daného úseku trajektorie. Určuje časovou změnu směru okamžité rychlosti.

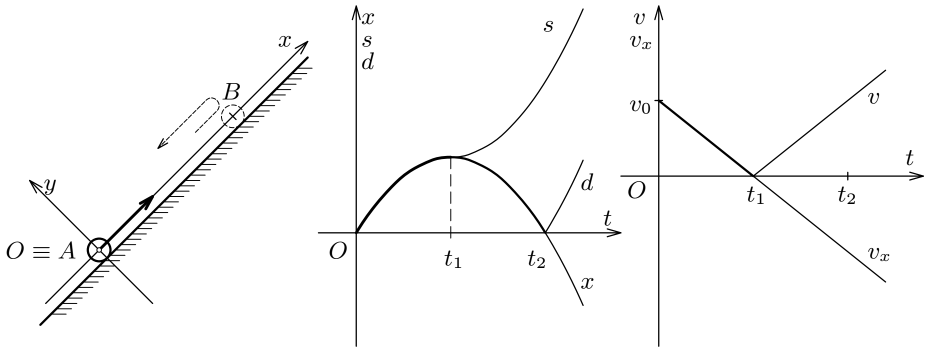
Při přímočarém pohybu je normálové zrychlení nulové a celkové zrychlení chápeme i jako zrychlení tečné: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}$.

V dopravní kinematice, kde nás zajímá především velikost okamžité rychlosti, se uplatní zrychlení tečné. Normálové zrychlení je naopak důležité při řešení úloh z dynamiky jízdy v zatáčce, kterými se v tomto textu nebudeme zabývat.

2 Grafy v dopravní kinematice

K získání názorné představy o průběhu určitého pohybu používáme grafy zobrazující závislost polohy nebo rychlosti na čase. Polohu vozidla na silnici můžeme určit dráhou, kterou vozidlo projelo, jeho vzdáleností od vztažného bodu nebo polohovou souřadnicí. U rychlosti vozidla můžeme sledovat, jak se mění její velikost nebo polohová souřadnice.

Ukážeme si to zjednodušeně na příkladu kuličky, kterou položíme na nakloněnou rovinu do bodu A a udělíme ji počáteční rychlost $\boldsymbol{v}_0$ vzhůru podél nakloněné roviny (obr. 6). Kulička v čase t_1 dosáhne nejvyššího bodu B, pak se vrací zpět a v čase t_2 projede bodem A směrem dolů. Pohyb popíšeme vzhledem ke vztažné soustavě, jejíž počátek je v bodě $O \equiv A$ a osa x směřuje vzhůru podél nakloněné roviny. Je zřejmé, že v časovém intervalu $\langle 0, t_1 \rangle$ není rozdíl mezi dráhou s, vzdáleností d od počátku a souřadnicí x. Neliší se ani velikost rychlosti v a souřadnice v_x. Po dosažení bodu B dráha s dále roste, ale vzdálenost d od počátku a souřadnice x se zmenšují. Souřadnice rychlosti změní znaménko a nadále platí $v_x = -v$. Po průjezdu bodem A se změní znaménko souřadnice x na záporné, ale vzdálenost d po dosažení nuly se opět zvětšuje a nadále platí $x = -d$.



Obr. 6

Také při grafickém znázornění pohybu dopravního prostředku nemusíme v některých případech rozlišovat dráhu, vzdálenost od vztažného bodu a polohovou souřadnici, případně velikost rychlosti a její souřadnici. Jindy naopak musíme k rozdílům mezi nimi přihlížet.

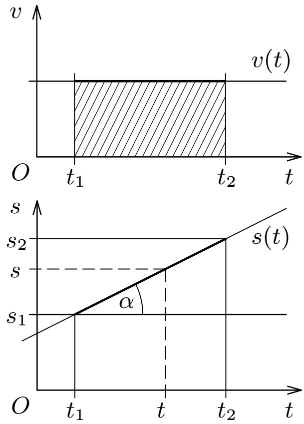
2.1 Kinematika a grafické znázornění rovnoměrného pohybu

Na obr. 7 jsou grafy rychosti $v(t)$ a dráhy $s(t)$ rovnoměrného pohybu, při kterém se v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ zvětšila dráha z s_1 na s_2. Platí

$$\Delta s = s_2 - s_1 = v\,(t_2 - t_1) = v\Delta t\,.$$

Přírůstek dráhy je tedy číselně roven obsahu vyšrafovaného obdélníka v grafu rychlosti. Dráha je lineární funkcí času, graf dráhy rovnoměrného pohybu je tedy částí přímky. Její rovnici můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$\frac{s - s_1}{t - t_1} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = v\,, \qquad s = v(t - t_1) + s_1\,.$$



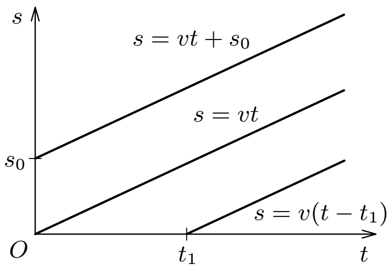
Obr. 7

Zvolíme-li na vodorovné a svislé ose stejná měřítka, tj. jednotce času přiřadíme na vodorovné ose stejně velký dílek jako jednotce dráhy na svislé ose, platí pro odchylku α grafu dráhy od vodorovné osy

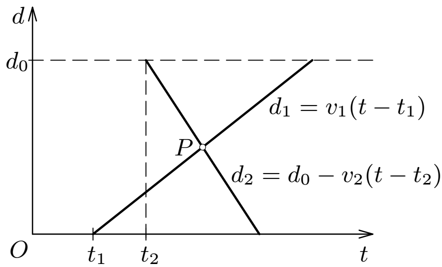
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\{\Delta s\}}{\{\Delta t\}} = \{v\}\,.$$

Směrnice grafu — $\operatorname{tg}\alpha$ — je číselně rovna velikosti rychlosti rovnoměrného pohybu. Čím strmější je graf dráhy, tím větší je rychlost. (To ovšem platí i při jakékoliv jiné volbě měřítek na osách.)

Vhodnou volbou počátečních podmínek pohybu můžeme dojít i k jiným rovnicím grafu dráhy, uvedeným na obr. 8.



Obr. 8



Obr. 9

Chceme-li v jednom grafu zobrazit pohyby několika dopravních prostředků, které se po komunikaci pohybují oběma směry, použijeme místo grafu dráhy graf vzdálenosti od vztažného bodu $d(t)$. Jestliže např. v čase t_1 vyjede z místa A nějaké vozidlo stálou rychlostí v_1 směrem k místu B ležícím ve vzdálenosti d_0 a v čase t_2 vyjede druhé vozidlo z místa B stálou rychlostí v_2 směrem k místu A, můžeme jejich pohyby popsat rovnicemi

$$d_1 = s_1 = v_1(t - t_1))\,, \qquad t_1 < t < t_1 + \frac{d_0}{v_1}\,,$$

$$d_2 = d_0 - s_2 = d_0 - v_2(t - t_2))\,, \qquad t_2 < t < t_2 + \frac{d_0}{v_2}\,,$$

a zobrazit ve společném grafu podle obr. 9. Z průsečíku P obou čar pak snadno určíme čas setkání obou vozidel a polohu místa, kde k setkání dojde. Ke stejnému výsledku dojdeme i řešením rovnice $d_1 = d_2$.

Příklad 2.

Nákladní automobil vyjel v 7 h 00 min z Prahy do Brna po dálnici D1 a pohyboval se stálou rychlostí 80 km/h. Vzdálenost obou měst je 200 km. V 7 h 30 min za ním vyjel osobní automobil jedoucí stálou rychlostí 110 km/h. Ve stejném okamžiku vyjel na dálnici z Brna směrem na Prahu jiný osobní automobil a udržoval stálou rychlost 100 km/h. Určete, kdy a kde se nákladní automobil setká s oběma osobními automobily. Úlohu řešte nejprve graficky, potom početně.

Řešení

Graf znázorňující, jak se mění vzdálenosti všech tří vozidel od Prahy v závislosti na čase, je na obr. 10. K jeho sestrojení byly použity body zobrazující odjezdy jednotlivých vozidel z jednoho města a příjezdy do druhého města.

– Nákladní automobil pojede z Prahy do Brna 2,5 h a přijede tam v 9 h 30 min.

– První osobní automobil pojede (200/110) h $\doteq$ 1 h 49 min a do Brna přijede už v 9 h 19 min.

– Druhý osobní automobil pojede 2 h a přijede do Prahy v 9 h 30 min.

Z polohy průsečíků P_1 a P_2 vyčteme, že nákladní automobil se nejprve setká s osobním automobilem jedoucím od Brna a to v 8 h 23 min ve vzdálenosti 111 km od Prahy. Osobní automobil jedoucí od Prahy jej předjede v 8 h 50 min ve vzdálenosti 147 km od Prahy.

Pro početní řešení napíšeme nejprve rovnice jednotlivých pohybů:

Nákladní automobil:

$$d_1 = v_1(t - t_1)\,, \quad v_1 = 80\ \mathrm{km/h}, \quad t_1 = 7{,}0\ \mathrm{h}\,,$$

1. osobní automobil:

$$d_2 = v_2(t - t_2)\,, \quad v_2 = 110\ \mathrm{km/h}, \quad t_2 = 7{,}5\ \mathrm{h}\,,$$

2. osobní automobil:

$$d_3 = d_0 - v_3(t - t_3)\,, \quad d_0 = 200\ \text{km},\ v_3 = 100\ \text{km/h},\ t_3 = 7,5\ \text{h}\,,$$

Při výpočtu použijeme jednotky km, h a km/h. Vzdálenosti, kde došlo k setkání vozidel, označíme d' a d'', příslušné časy t' a t''. Pro automobily jedoucí týmž směrem řešíme rovnici $d_1 = d_2$:

$$v_1(t' - t_1) = v_2(t' - t_2) \quad \longrightarrow \quad t' = \frac{v_2 t_2 - v_1 t_1}{v_2 - v_1} = 8{,}833\ \text{h} = 8\ \text{h}\ 50\ \text{min}\,,$$

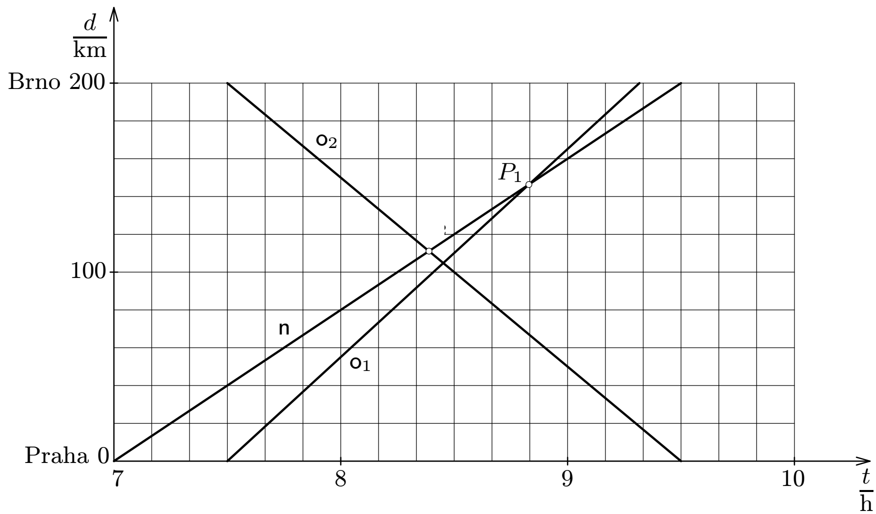
$$d' = v_1(t' - t_1) = 147\ \text{km}\,.$$

Pro automobily jedoucí opačným směrem řešíme rovnici $d_1 = d_3$:

$$v_1(t''-t_1) = d_0 - v_3(t''-t_3) \ \rightarrow\ t'' = \frac{d_0 + v_1 t_1 + v_3 t_3}{v_1 + v_3} = 8{,}389\ \text{h} = 8\ \text{h}\ 23\ \text{min}\,,$$

$$d'' = v_1(t'' - t_1) = 111\ \text{km}\,.$$

Početní řešení úlohy není příliš složité, ale snadno v něm přehlédneme numerickou chybu. Čtení z grafu je spolehlivější a dává i dostatečně přesné výsledky, zejména když použijeme milimetrový papír.



Obr. 10

2.2 Modelování reálného pohybu pomocí rovnoměrných pohybů

V příkladu 2. jsme řešili úlohu o pohybech po dálnici, kde za ideálních podmínek můžeme jet stálou rychlostí. Někdy je možné i složitější pohyby přibližně popsat jako několik na sebe navazujících rovnoměrných pohybů.

Příklad 3

Cyklistické závody mládeže budou probíhat na trati dlouhé 29,5 km. Očekáváme následující průběh jízdy: První úsek délky 6,0 km je po rovině a cyklisté pojedou rychlostí 30 km/h. Na druhém úseku délky 2,0 km je mírné stoupání, cyklisté zmírní na 20 km/h. Následuje prudší stoupání v délce 4,5 km, kde se rychlost cyklistů zmenší na 15 km/h, a vodorovný úsek délky 9,0 km, který projedou opět rychlostí 30 km/h. Do cíle zbývá mírné klesání a cílová rovinka, kde předpokládáme rychlost 36,0 km/h.
a) Určete celkovou dobu jízdy a průměrnou rychlost.
b) Sestrojte grafy rychlosti a dráhy. Porovnejte celkovou dráhu a obsah obrazce omezeného osou času a grafem rychlosti.

Řešení

a) Nejprve určíme doby průjezdu jednotlivých úseků a celkovou dobu jízdy.

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = 0{,}20\ \mathrm{h} = 12\ \mathrm{min}\,, \quad t_2 = \frac{s_2}{v_2} = 0{,}10\ \mathrm{h} = 6\ \mathrm{min}\,,$$

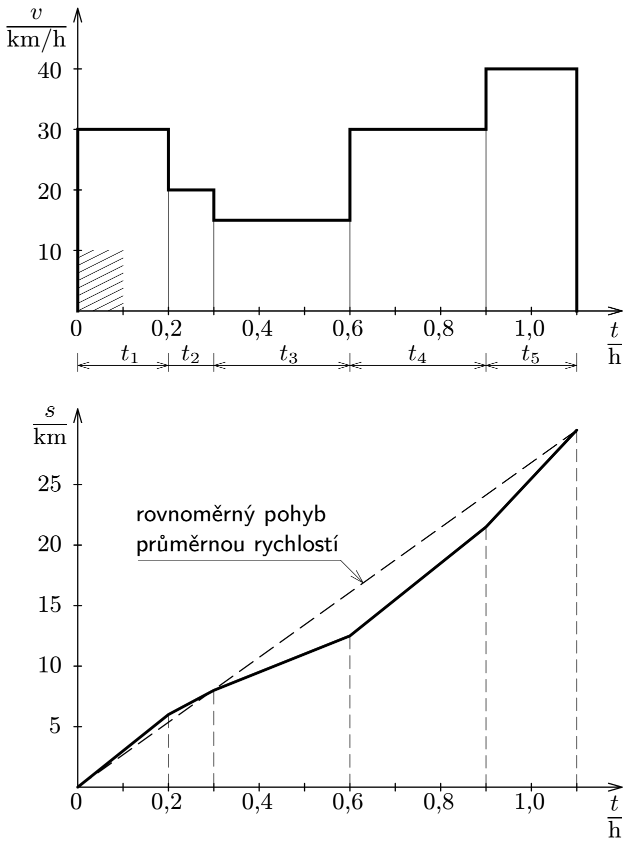
$$t_3 = \frac{s_3}{v_3} = 0{,}30\ \mathrm{h} = 18\ \mathrm{min}\,, \quad t_4 = \frac{s_4}{v_4} = 0{,}30\ \mathrm{h} = 18\ \mathrm{min}\,,$$

$$t_5 = \frac{s_5}{v_5} = 0{,}20\ \mathrm{h} = 12\ \mathrm{min}\,, \qquad t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 1{,}10\ \mathrm{h}\,.$$

Průměrná rychlost bude

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{t} = 26{,}8\ \mathrm{km/h}\,.$$

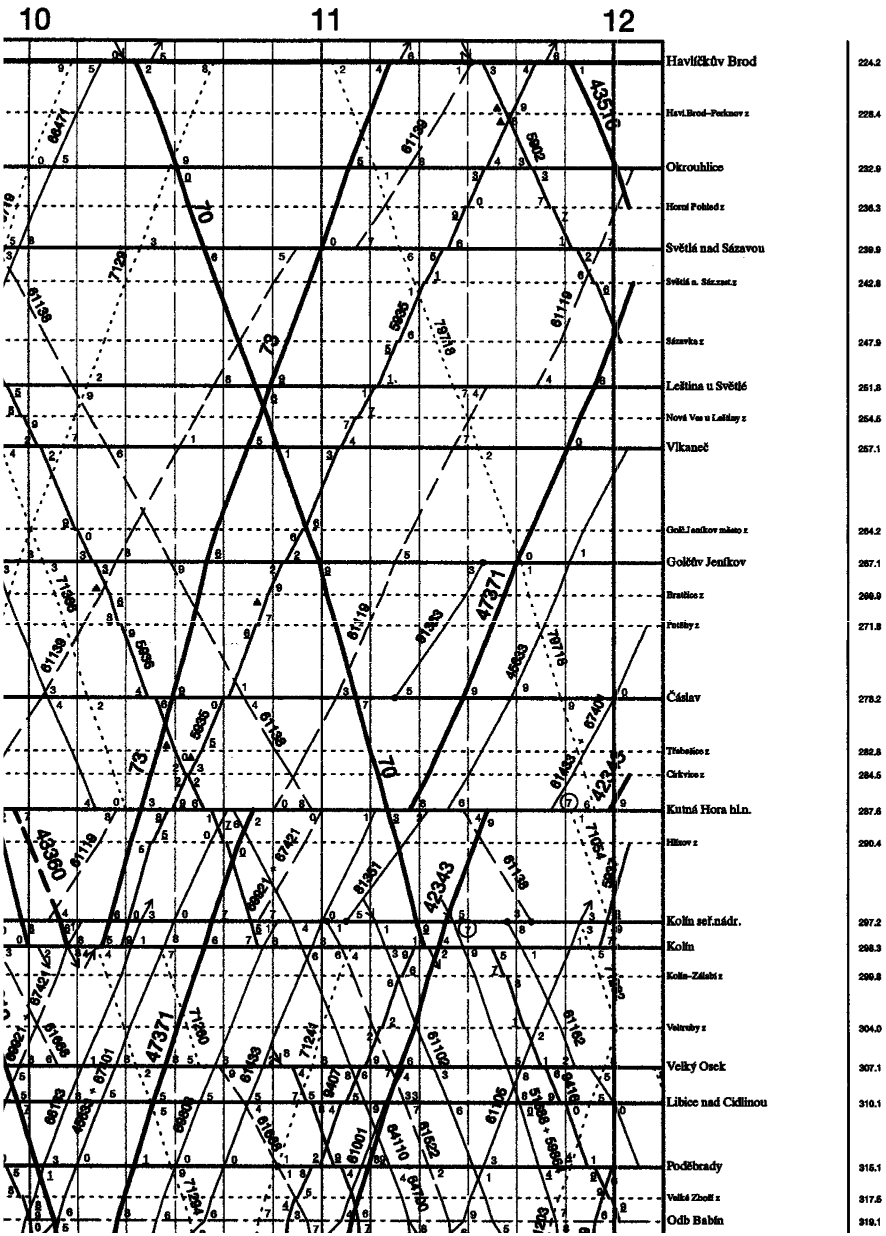
b) Výsledky výpočtů využijeme k sestrojení grafů na obr. 11. Obrazec ohraničený osou času a grafem rychlosti se skládá z obdélníků, jejichž plošné obsahy jsou číselně rovny součinům $s_1 = v_1 t_1$, $s_2 = v_2 t_2$ až $s_5 = v_5 t_5$. Jednotkový plošný obsah má vyšrafovaný obdélníček v levém dolním rohu obrazce, neboť $10\ \mathrm{km/h} \cdot 0{,}1\ \mathrm{h} = 1\ \mathrm{km}$. Celkový plošný obsah obrazce je číselně roven celkové dráze závodníků, $s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5$. Časový průběh dráhy je zobrazen v grafu $s(t)$.



Obr. 11

V železniční praxi se setkáváme s grafickým jízdním řádem (grafikonem), který znázorňuje, jak se mění polohy všech vlaků na určité trati v závislosti na čase. Na obr. 12 vidíme část takového grafikonu pro trať Havlíčkův Brod – Kolín – Nymburk hl.n. Na horním a dolním okraji grafikonu je časová osa rozdělená po 10 minutách. U průsečíku jednotlivých grafů s vynášecími čarami stanic jsou umístěny malé číslice, které časový údaj upřesňují na minuty, případně půlminuty (podtržené číslice — např. <u>6</u> čteme jako 6 min 30 s). Na pravé straně grafikonu je svislá osa, na které čteme kilometrové polohy stanic, tedy jejich souřadnice. Podobně jako na dálnicích i podél železnic se nacházejí souřadnicové značky. Jsou zhotoveny jako patníky rozmístěné pravidelně po 100 metrech.

Šikmé čáry grafikonu zobrazují závislosti poloh vlaků na čase. Pohyby vlaků v obou směrech jsou ovšem idealizovány, jako by se skládaly ze samých rovnoměrných pohybů. Grafikon tedy popisuje reálné pohyby vlaků jen přibližně.


10
11
12
Havlíčkův Brod
Okrouhlice
Světlá nad Sázavou
Leština u Světlé
Vlkaneč
Golčův Jeníkov
Čáslav
Kutná Hora hl.n.
Kolín seř.nádr.
Kolín
Velký Osek
Libice nad Cidlinou
Poděbrady
Odb Babín

Obr. 12

Úloha 1

Z grafikonu na obr. 12 určete průměrné rychlosti rychlíku č. 70 ANTONÍN DVOŘÁK v úsecích Světlá nad Sázavou – Golčův Jeníkov a Golčův Jeníkov – Kolín. Kilometrové polohy stanic jsou 233,9 km, 267,1 km a 298,3 km.

Příklad 4

Cyklistické závody mládeže byly uspořádány na okruhu délky 4 km, který museli závodníci projet 5krát. Pavel dosáhl průměrné rychlosti 40 km/h, Kája urazil jeden okruh za 7 min 30 s a Jirka dosáhl celkového času 42 min 30 s.

a) Určete pořadí závodníků v cíli.

b) Sestrojte graf závislosti polohy závodníků na čase a odhadněte, kdy a kde došlo k předjetí některého pomalejšího z uvedených tří závodníků závodníkem rychlejším.

Řešení

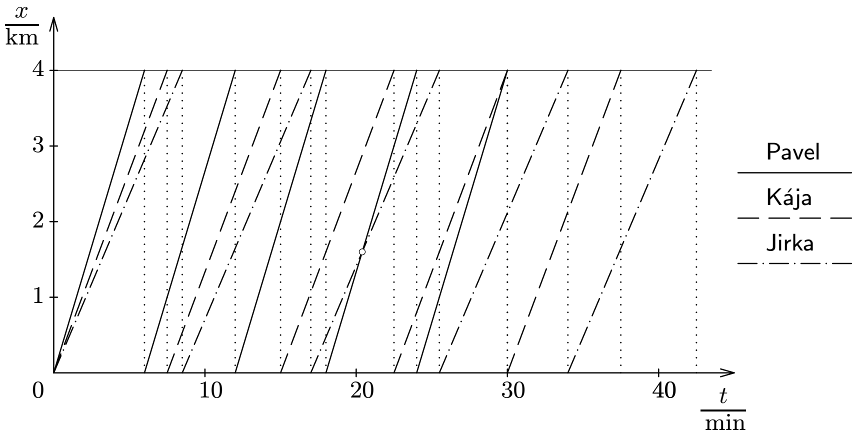
a) Pavel byl nejrychlejší, jeden okruh projel za 0,1 h = 6 min. Jirka byl nejpomalejší, jeden okruh projel za 8 min 30 s. Pořadí v cíli: Pavel, Kája , Jirka.

b) Pro určení polohy závodníka na okruhu použijeme souřadnici $x \in \langle 0, 4 \rangle$km. Na konci okruhu se souřadnice závodníka změní ze 4 km na 0 km a znovu se začíná zvětšovat. Z grafu na obr. 13 vidíme, že Pavel předjel Jirku o jedno kolo při svém čtvrtém okruhu. Čas a místo předjetí určíme výpočtem:

$$v_1 t = v_3 t + 4000\ \mathrm{m}\,, \quad \text{kde } v_1 = 11{,}11\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},\ v_3 = 7{,}843\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

$$t = \frac{4000\ \mathrm{m}}{v_1 - v_3} = 1224\ \mathrm{s} \doteq 20{,}4\ \mathrm{min}\,, \qquad x = v_1 t - 12\,000\ \mathrm{m} \doteq 1600\ \mathrm{m}\,.$$

V okamžiku, kdy Pavel dojížděl do cíle, zbývalo Kájovi ještě jedno kolo.

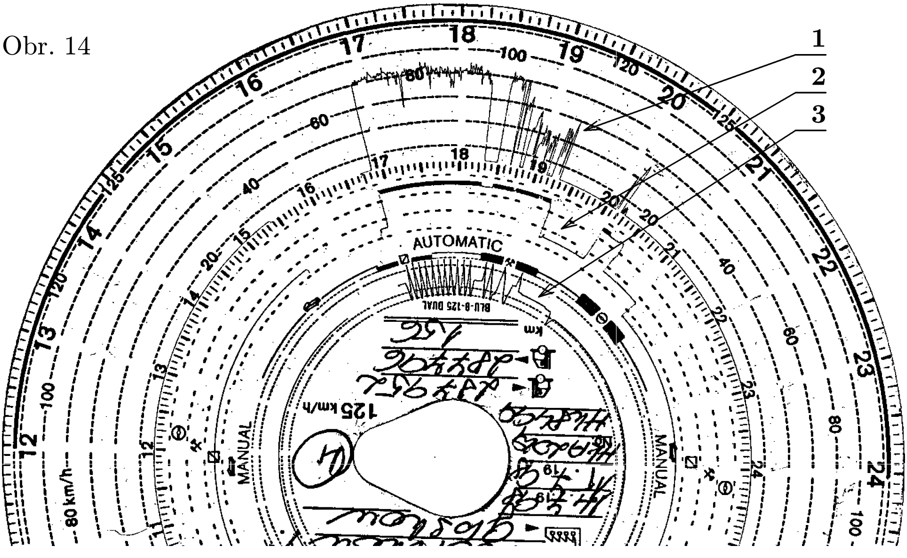


Obr. 13

Úloha 2
Autobusová linka MHD spojuje místa A, B. Jejich vzdálenost je 18 km a autobus ji překoná za 42 minut. První autobus vyjíždí z koncové stanice A v 6 h 0 min, další v pravidelných intervalech 10 min. V koncové stanici B čekají 8 min a vracejí se po stejné trase zpět. Zpáteční jízda trvá rovněž 42 minut. Kolik autobusů jedoucích v protisměru potká cestující, který vyjíždí ze stanice A v 7 h 0 min, a kolik cestující, který vyjíždí ze stanice A v 8 h 0 min? V jakých časových intervalech je budou potkávat?

V autobusové a nákladní dopravě se používají *tachografy*, které zapisují na kotouček papíru okamžitou rychlost vozidla a ujetou dráhu v závislosti na čase . Část takového záznamu je na obr. 14. Čára 1 je graf okamžité rychlosti. Čára 2 popisuje činnost řidiče (řízení, jiná práce, čekací doba, odpočinek). Zubatá čára 3 registruje chod počítadla kilometrů — během přechodu z jedné krajní polohy do druhé ujede vozidlo 5 km. Na rozdíl od železničního grafikonu, který je přibližný, poskytuje záznam z tachografu přesné informace o skutečném průběhu sledované jízdy.

Obr. 14



V naší ukázce se automobil pohyboval od 16 h 52 min do 18 h 20 min po dálnici a od 18 h 30 min do 19 h 20 min po okresní silnici s hustým provozem. První část jízdy se dá přibližně modelovat rovnoměrným pohybem, při kterém automobil ujel za 88 min dráhu 114 km (odečteno z čáry 3) a pohyboval se rychlostí 78 km/h.

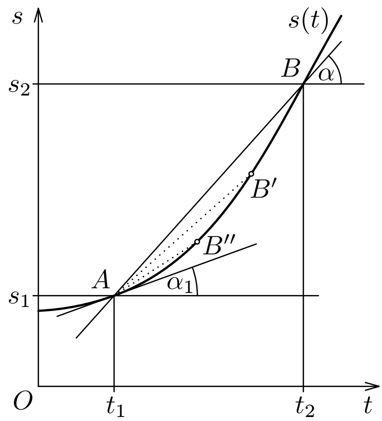
Druhá část jízdy byla mnohem složitější. Automobil se několikrát musel zastavit a znovu rozjet. Za 50 min ujel jen 40 km a dosáhl průměrné rychlosti 48 km/h. Takovýto komplikovaný děj už nemůžeme výstižně modelovat rovnoměrnými pohyby. Jednotlivá rozjíždění a zastavení se však dají dosti přesně popsat jako pohyby rovnoměrně zrychlené a rovnoměrně zpomalené.

2.3 Určení okamžité rychlosti z grafu dráhy při nerovnoměrném pohybu

V článku 2.1 jsme se zabývali grafem dráhy rovnoměrného pohybu. Ten leží v přímce, jejíž směrnice je, pokud zvolíme na ose času stejné měřítko jako na ose dráhy, číselně rovna velikosti konstantní rychlosti pohybu.

Grafem dráhy nerovnoměrného pohybu je křivka (obr. 15). Směrnice sečny grafu, která prochází bodem A o souřadnicích $[t_1, s_1]$ a bodem B o souřadnicích $[t_2, s_2]$, je číselně rovna průměrné rychlosti v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\{s_2 - s_1\}}{\{t_2 - t_1\}} = \frac{\{\Delta s\}}{\{\Delta t\}} = \{v_\mathrm{p}\}\,.$$



Obr. 15

Chceme-li určit okamžitou rychlost v čase t_1, musíme časový interval Δt zmenšit k nule. Bod B se přes body B', B'' přiblíží k bodu A a sečna grafu přejde v tečnu v bodě A. Velikost okamžité rychlosti v čase t_1 je tedy číselně rovna směrnici tečny grafu v bodě A: [1])

$$v(t_1) = \operatorname{tg}\alpha_1\,.$$

Při pohybu dopravního prostředku se okamžitá rychlost vždy mění spojitě (pokud ovšem nedojde k nějaké havárii). Proto se spojitě mění i sklon grafu dráhy. Graf má podobu hladké čáry bez ostrých zlomů.

[1]Právě popsaný postup se ve vyšší matematice nazývá derivování funkce $s(t)$ v bodě $t = t_1$ a zapisuje se vztahem

$$v(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_1 + \Delta t) - s(t_1)}{\Delta t}\,.$$

2.4 Určení dráhy nerovnoměrného pohybu z grafu rychlosti

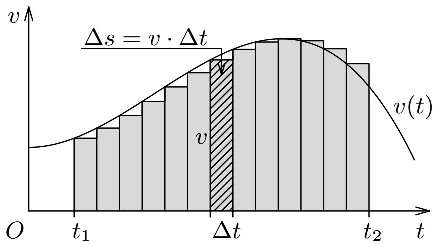
Známe-li graf rychlosti nerovnoměrného pohybu a chceme-li určit přírůstek dráhy v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$, můžeme postupovat podobně jako v příkladu 3 a nahradit nerovnoměrný pohyb řadou po sobě jdoucích rovnoměrných pohybů. Časový interval rozdělíme na malé dílčí intervaly velikosti Δt, ve kterých se velikost okamžité rychlosti změní jen nepatrně. Můžeme tedy pohyby v těchto dílčích intervalech přibližně nahradit rovnoměrnými pohyby s rychlostmi rovnými skutečným okamžitým rychlostem na počátcích dílčích intervalů. Grafem rychlosti takto získaného náhradního pohybu je „schodová“ čára, která se liší od grafu skutečného pohybu tím méně, čím kratší intervaly Δt zvolíme (obr. 16).

Elementární přírůstek dráhy náhradního pohybu $\Delta s = v\Delta t$ v každém dílčím intervalu je číselně roven obsahu jednoho obdélníkového proužku (v obr. 16 vyznačeno šrafovaně). Celá dráha náhradního pohybu je číselně rovna obsahu vytečkované plochy. Při velmi jemném dělení $(\Delta t \to 0)$ se náhradní pohyb prakticky neliší od skutečného pohybu a vytečkovaná plocha přejde v obrazec omezený grafem rychlosti skutečného pohybu a osou času (obr. 17).

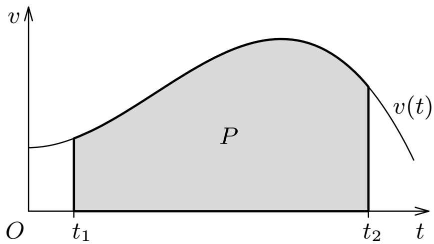
Vztah mezi počáteční hodnotou dráhy s_1, konečnou hodnotou dráhy s_2 a obsahem vytečkovaného obrazce P je tedy

$$\mathrm{s}_2 - s_1 = P\,,$$

přičemž jednotkový obsah má obdélník, jehož jednu stranu tvoří jednotková úsečka na ose času a druhou stranu jednotková úsečka na ose rychlosti. Jestliže čas vynášíme v sekundách a rychlost v $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, odpovídá jednotkovému obsahu dráha 1 m. Vynášíme-li čas v hodinách a rychlost v $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ jako v příkladu 3, odpovídá jednotkovému obsahu dráha 1 km. [2])



Obr. 16



Obr. 17

[2]Právě popsaný postup se ve vyšší matematice nazývá integrace funkce $v(t)$ v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ a získaný výsledek se zapisuje vztahem $s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} v\,\mathrm{d}t\,.$

2.5 Kinematika a grafické znázornění rovnoměrně zrychleného a rovnoměrně zpomaleného pohybu

Rovnoměrně zrychlený je každý pohyb, při kterém se velikost okamžité rychlosti v závislosti na čase rovnoměrně zvětšuje. Tečné zrychlení $\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}$ má konstantní velikost a stejný směr jako okamžitá rychlost $\boldsymbol{v}$. Při *rovnoměrně zpomaleném* pohybu se velikost okamžité rychlosti v závislosti na čase rovnoměrně zmenšuje. Tečné zrychlení $\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}$ má konstantní velikost a opačný směr než okamžitá rychlost $\boldsymbol{v}$.

Je-li pohyb přímočarý, nevzniká normálové zrychlení a celkové zrychlení $\boldsymbol{a}$ se uplatňuje jako zrychlení tečné, $\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} = \boldsymbol{a}$. V úlohách z dopravní kinematiky často používáme označení $\boldsymbol{a}$ pro tečné zrychlení i v případech, kdy se jedná o pohyb křivočarý, ale zajímáme se jen o velikost okamžité rychlosti a její směr nás nezajímá. Této nepřesnosti se dopustíme i v následujících odstavcích.

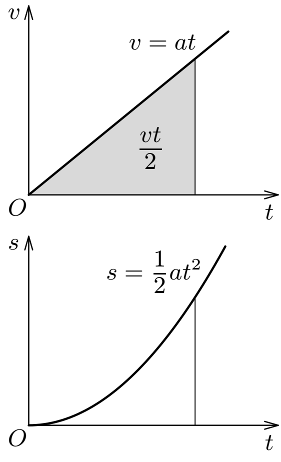
Rovnoměrně zrychlené a rovnoměrně zpomalené pohyby probíhají obvykle jen na krátkých úsecích trajektorie. Proto je vhodné při výpočtech používat pouze hlavní jednotky soustavy SI. Budeme tedy dráhu určovat v metrech, čas v sekundách, rychlost v $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a zrychlení v $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Průběh rovnoměrně zrychleného pohybu *s nulovou počáteční rychlostí* znázorňují grafy na obr. 18. Ze zákona rychlosti

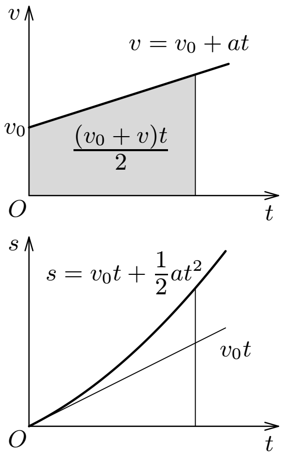
$$v = at$$

odvodíme zákon dráhy. Dráha uražená od začátku pohybu je číselně rovna obsahu trojúhelníka omezeného grafem rychlosti. Položíme-li $s_0 = 0$ (před startem vynulujeme počítadlo kilometrů), platí

$$s = \frac{vt}{2} = \frac{1}{2}at^2 = \frac{v^2}{2a}\,.$$



Obr. 18



Průběh rovnoměrně zrychleného pohybu *s nenulovou počáteční rychlostí* $\boldsymbol{v}_0$ znázorňují grafy na obr. 19. Zákon rychlosti má tvar

$$v = at + v_0 \,.$$

Dráhu uraženou v časovém intervalu $\langle 0, t \rangle$ určíme jako obsah lichoběžníka. Položíme-li opět $s_0 = 0$, platí

$$s = \frac{(v_0 + v)t}{2} = \frac{(v_0 + v_0 + at)t}{2} = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \,.$$

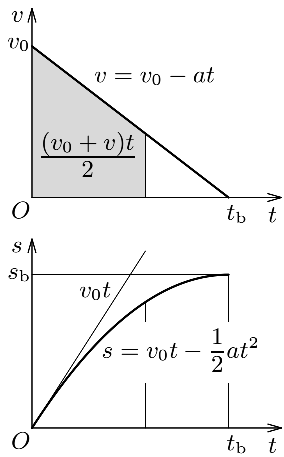
Obr. 19

Průběh rovnoměrně zpomaleného pohybu s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ znázorňují grafy na obr. 20. Pohyb může probíhat až do zastavení po dobu t_b, kterou nazýváme *brzdná doba*. Zákon rychlosti má tvar

$$v = v_0 - at \,,$$

dráhu uraženou v časovém intervalu $\langle 0, t \rangle$, kde $t < t_\mathrm{b}$, určíme opět jako obsah lichoběžníka. Položíme-li $s_0 = 0$, platí

$$s = \frac{(v_0 + v)t}{2} = \frac{(v_0 + v_0 - at)t}{2} = v_0 t - \frac{1}{2}at^2 \,.$$



obr. 20

Celková dráha s_b rovnoměrně zpomaleného pohybu se nazývá *brzdná dráha*. Vztahy mezi brzdnou dobou t_b, počáteční rychlostí v_0, brzdnou dráhou s_b a velikostí tečného zrychlení a připomínají zákony rovnoměrně zrychleného pohybu s nulovou počáteční rychlostí:

$$t_\mathrm{b} = \frac{v_0}{a} \,, \qquad s_\mathrm{b} = \frac{v_0 t_\mathrm{b}}{2} = \frac{1}{2}at_\mathrm{b}^2 = \frac{v_0^2}{2a}$$

Kdybychom totiž nafilmovali rovnoměrně zpomalený pohyb nějakého vozidla až do zastavení a pak film pustili pozpátku, dostali bychom rovnoměrně zrychlený pohyb s nulovou počáteční rychlostí, při kterém by couvající vozidlo v čase $t = t_\mathrm{b}$ dosáhlo rychlosti $v = v_0$.

2.6 Modelování reálných pohybů pomocí rovnoměrných a rovnoměrně proměnných pohybů

Příklad 4

Automobil jedoucí rychlostí 110 km/h začal brzdit a zastavil se na dráze 100 m. Jakou rychlostí se pohyboval ve vzdálenosti 10 m před místem zastavení?

Řešení

Budeme předpokládat, že celé brzdění proběhlo jako pohyb rovnoměrně zpomalený s počáteční rychlostí $v_0 = 110$ km/h a celkovou brzdnou dráhou $s_\mathrm{b} = 100$ m. Do posledního úseku brzdné dráhy o délce $s_1 = 10$ m vjel automobil s počáteční rychlostí v_1. Ze vztahu pro výpočet brzdné dráhy vyjádříme velikost zrychlení:

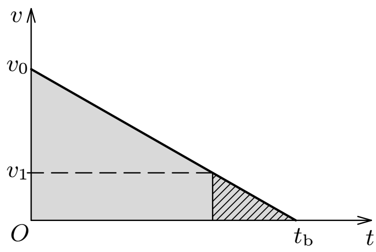
$$s_\mathrm{b} = \frac{v_0^2}{2a}, \qquad a = \frac{v_0^2}{2s_\mathrm{b}} = \frac{v_1^2}{2s_1} = \text{konst.}.$$

Úpravou dostaneme:

$$\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2 = \frac{s_1}{s_\mathrm{b}}, \qquad v_1 = v_0\sqrt{\frac{s_1}{s_\mathrm{b}}} = 10\ \mathrm{km\cdot h^{-1}} \cdot \sqrt{0{,}10} = 35\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}.$$

Ke stejnému výsledku můžeme dojít z grafu rychlosti na obr. 21. Celková brzdná dráha a poslední úsek brzdné dráhy jsou číselně rovny obsahům vyšrafovaného a vybarveného trojúhelníka. Poměr obsahů podobných trojúhelníků je roven druhé mocnině poměru podobnosti:

$$\frac{s_1}{s_\mathrm{b}} = k^2 = \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2.$$



Obr. 21

Příklad 5

Určete, jakou dobu potřebuje osobní vlak k překonání vzdálenosti 2,4 km mezi sousedními stanicemi, jestliže se rozjíždí se stálým zrychlením o velikosti $0{,}70\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, po dosažení maximální rychlosti 90 km/h se pohybuje rovnoměrně a nakonec brzdí se zrychlením o velikosti $0{,}55\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ až do zastavení. Sestrojte graf rychlosti a graf dráhy popsaného pohybu.

Řešení

Označení daných veličin:

$s_\mathrm{c} = 2400$ m, $v_\mathrm{m} = 90\ \mathrm{km\cdot h^{-1}} = 25\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $a_1 = 0{,}70\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, $a_3 = 0{,}55\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Rozjezd a zastavení vlaku budeme nejprve vyšetřovat jako samostatné pohyby. Vlak potřeboval k rozjezdu dráhu s_1, kterou projel za dobu t_1. Brzdění proběhlo na dráze s_3 za dobu t_3. Platí:

$$t_1 = \frac{v_m}{a_1} \doteq 36\ \mathrm{s}, \quad s_1 = \frac{v_m^2}{2a_1} \doteq 450\ \mathrm{m}, \quad t_3 = \frac{v_m}{a_3} \doteq 45\ \mathrm{s}, \quad s_3 = \frac{v_m^2}{2a_3} \doteq 570\ \mathrm{m}.$$

Na rovnoměrný pohyb zbývá dráha s_2, kterou vlak projede za dobu t_2:

$$s_2 = s_c - s_1 - s_3 \doteq 1380\ \mathrm{m}, \quad t_2 = \frac{s_2}{v_m} = 55\ \mathrm{s}$$

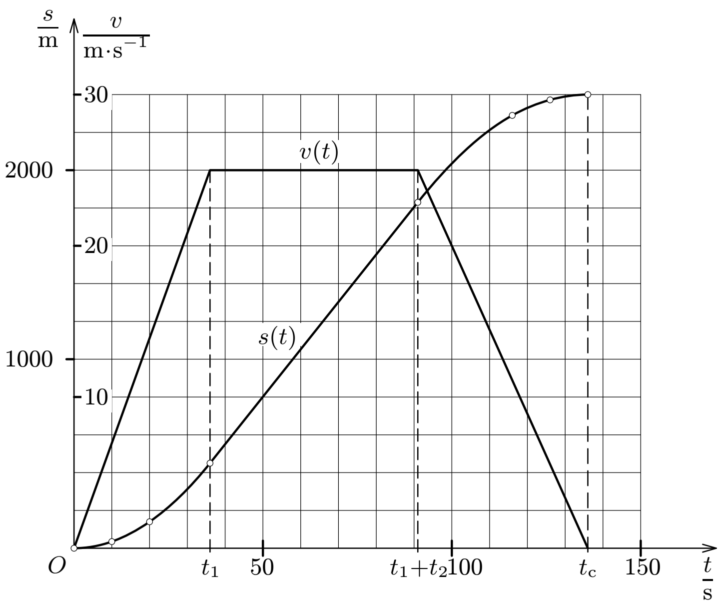
Celková doba jízdy je $t_c = t_1 + t_2 + t_3 = 136\ \mathrm{s}$.

Graf rychlosti na obr. 22 má tvar lichoběžníka. Z něj můžeme odvodit jednodušší výpočet celkové doby jízdy. Platí:

$$s_c = v_m t_c - \frac{v_m t_1}{2} - \frac{v_m t_3}{2}, \qquad t_c = \frac{s_c}{v_m} + \frac{t_1}{2} + \frac{t_3}{2} = \frac{s_c}{v_m} + \frac{v_m}{2a_1} + \frac{v_m}{2a_3}.$$

Graf dráhy na obr. 22 se skládá z úsečky a dvou úseků paraboly. Jednotlivé části na sebe plynule navazují. Parabolu v prvním úseku popisuje funkce $s = \frac{1}{2}a_1 t^2$. Parabolu ve třetím úseku popisuje funkce $s = s_c - \frac{1}{2}a_3(t_c - t)^2$. (Uvažte, jak by vypadal pozpátku puštěný filmový záznam pohybu.) Při kreslení grafu byla použita tabulka:

t/s	0	10	20	36	91	116	126	136
s_m	0	35	140	450	1830	2290	2370	2400



Obr. 22

Úloha 3
Automobil se rozjížděl tak, že při zařazené „jedničce“ dosáhl během prvních dvou sekund rychlosti 27 km/h, během dalších tří sekund při zařazené „dvojce“ dosáhl rychlosti 54 km/h. Pak řidič zařadil „trojku“ a během dalších tří sekund dosáhl rychlosti 72 km/h, zařadil „čtyřku“ a během pěti sekund dosáhl rychlosti 90 km/h, zařadil „pětku“ a pokračoval v jízdě stálou rychlostí 90 km/h. Po deseti sekundách rovnoměrného pohybu si řidič všiml, že nemá dobře upevněný náklad, začal brzdit a během devíti sekund zastavil, aby závadu odstranil. Rozjezd považujte za sérii rovnoměrně zrychlených pohybů a brzdění za rovnoměrně zpomalený pohyb. Nakreslete graf rychlosti a určete celkovou dráhu automobilu.

Úloha 4
Sprinter proběhl dráhu 100 m za 9,90 s. Předpokládejme, že prvních 30 m se rozbíhal rovnoměrně zrychleným pohybem, a pak běžel stálou rychlostí až do cíle. Určete rychlost v druhé části pohybu.

Úloha 5
Na křižovatce zastavila „na červenou“ dvě vozidla v sousedních jízdních pruzích. Po změně světelné signalizace „na zelenou“ vyrazila obě vozidla tak, že první vozidlo dosáhlo rychlosti 60 km/h, která je v tomto úseku povolena, za 8,3 s a druhé vozidlo za 12,5 s.

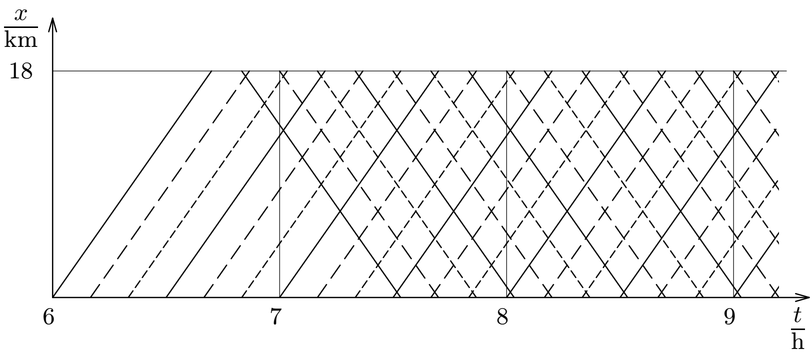
a) Rozjezd obou vozidel zakreslete do grafu $v(t)$. Do téhož grafu také zakreslete, jak se měnila v závislosti na čase velikost relativní rychlosti vozidel, tj. velikost rychlosti, kterou mělo jedno vozidlo ve vztažné soustavě spojené s druhým vozidlem.

b) Sestrojte graf, který znázorňuje, jak se během rozjezdu měnila vzájemná vzdálenost obou vozidel v závislosti na čase. Potřebné vztahy odvoďte z grafu relativní rychlosti.

Výsledky úloh

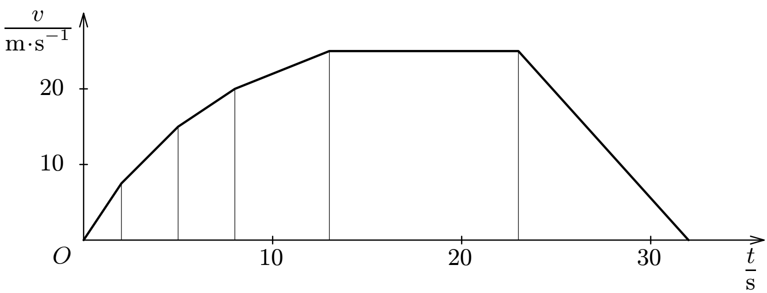
1. $69\,\mathrm{km/h}$, $87\,\mathrm{km/h}$

2. Úlohu nejsnáze vyřešíme pomocí jednoduchého grafikonu. Z něj vyčteme, že první cestující potká 6 autobusů jedoucích v protisměru a druhý jich potká 9. Budou-li se autobusy pohybovat stálou rychlostí, bude je potkávat pravidelně každých 5 minut.



Obr. 23

3.



Obr. 24

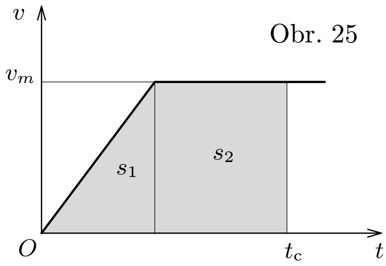
$$s = \frac{v_1 t_1}{2} + \frac{(v_1 + v_2)t_2}{2} + \frac{(v_2 + v_3)t_3}{2} + \frac{(v_3 + v_4)t_4}{2} + v_4 t_5 + \frac{v_4 t_6}{2} \doteq 570\ \mathrm{m}\,.$$

4. Z grafu rychlosti odvodíme:

$$v_\mathrm{m} t_\mathrm{c} = 2s_1 + s_2\,,$$

$$v_\mathrm{m} = \frac{2s_1 + s_2}{t_c} = \frac{130\ \mathrm{m}}{9{,}9\ \mathrm{s}} =$$

$$= 13{,}1\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 47{,}3\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}\,.$$



Obr. 25

5. Dané veličiny: $v_\mathrm{m} = 60\ \mathrm{km/h} = 16{,}7\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $t_1 = 8{,}3\ \mathrm{s}$, $t_2 = 12{,}5\ \mathrm{s}$.

a) Graf rychlosti je na obr. 26. Relativní rychlost v_r vozidel se nejprve rovnoměrně zvětšovala a v čase t_1 dosáhla maximální hodnoty

$$v_\mathrm{rm} = v_\mathrm{m} - v_\mathrm{m}\frac{t_1}{t_2} = v_\mathrm{m}\frac{t_2 - t_1}{t_2}\,.$$

Po dosažení maxima se rovnoměrně zmenšovala a v čase t_2 klesla na nulu.

b) Vzájemná vzdálenost vozidel v určitém čase je číselně rovna obsahu obrazce ohraničeného grafem relativní rychlosti.

Pro $0 < t < t_1$ platí: $v_\mathrm{r} = v_\mathrm{rm}\dfrac{t}{t_1}$, $\quad d = \dfrac{v_\mathrm{r} t}{2} = \dfrac{v_\mathrm{m}(t_2 - t_1)t^2}{2t_1 t_2}$.

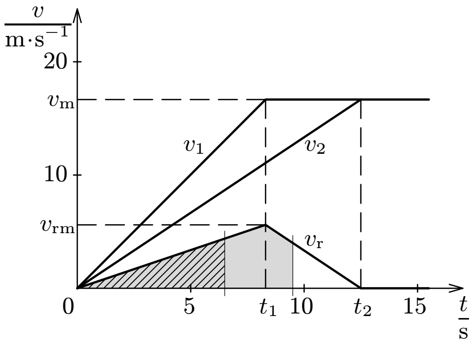
V čase $t = t_1$ dostáváme: $d_1 = \dfrac{v_\mathrm{rm} t_1}{2} = \dfrac{v_\mathrm{m}(t_2 - t_1)t_1}{2t_2} \doteq 23\ \mathrm{m}$.

V čase $t = t_2$ dosáhne vzdálenost vozidel hodnoty

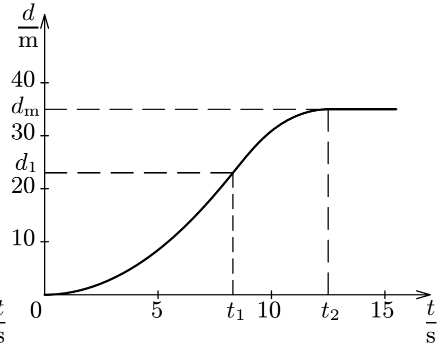
$$d_\mathrm{m} = \frac{v_\mathrm{rm} t_2}{2} = \frac{v_\mathrm{m}(t_2 - t_1)}{2} \doteq 35\ \mathrm{m} \text{ a dále již neroste (obr. 27).}$$

Pro $t_1 < t < t_2$ platí: $v_\mathrm{r} = v_\mathrm{rm}\dfrac{t_2 - t}{t_2 - t_1}$,

$$d = d_\mathrm{m} - \frac{v_\mathrm{r}(t_2 - t)}{2} = \frac{v_\mathrm{m}(t_2 - t_1)}{2} - \frac{v_\mathrm{m}(t_2 - t)^2}{2t_2} = \frac{v_\mathrm{m}(2t_2 t - t_1 t_2 - t^2)}{2t_2}\,.$$



Obr. 26



Obr. 27