

Hranice Mendělejevovy tabulky

aneb

jak produkovat a zkoumat stále těžší prvky

Studijní text FO pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Vladimír Wagner, Vladimír Vicha a Zdeněk Janout

Poděkování: Vypracování publikace bylo podpořeno v rámci programu INTER-EXCELLENCE (podprogramu INTER-TRANSFER) jako součást projektu LTT18021 „Spolupráce ČR s SÚJV Dubna v teoretické a jaderné fyzice a při využití jaderných metod v dalších oborech“.

Obsah

Předmluva.....	3
Úvod	4
1 Chemické prvky	5
1.1 Chemické vlastnosti prvků a Mendělejevova tabulka	5
1.2 Jak se supertěžké prvky produkují?.....	6
1.3 Studená a horká fúze.....	8
1.4 Ostrov stability.....	11
1.5 Chemie jednoho atomu	13
2 Konkrétní fyzika spojená s produkcí a studiem supertěžkých prvků	15
2.1 Nástroje a jednotky využívané v mikrosvětě.....	15
2.2 Vlastnosti jader	24
2.3 Urychlování a pohyb iontů v elektrickém a magnetickém poli.....	34
2.4 Kinematika, srážky, jaderné reakce a rozpady	52
2.5 Pravděpodobnost reakcí – účinný průřez.....	69
2.6 Nestabilita jader, radioaktivita a rozpadový zákon	76
2.7 Elektronový obal atomu určuje jeho chemické vlastnosti.....	85
3 Neřešené příklady na závěr	88
4 Literatura	91

Předmluva

Milé studentky, milí studenti,

dostává se Vám do rukou studijní text, který je dlouhý a náročný, nicméně věříme, že tyto jeho vlastnosti budou více než vynahrazeny jeho zajímavostí a významností tématu, kterým se zabývá. Není jím nic menšího než výroba nových prvků, které v přírodě na Zemi neexistují. Po jeho prostudování tak budete mít základní přehled o tom, co je pro stvoření nového prvku potřeba.

Nové poznatky načerpáte nejen v samotném textu, ale zejména v řešených příkladech, které ilustrují probíranou látku a slouží jako zdroj poučení a doplnění nových informací. Chcete-li stvořit nové atomové jádro, potřebujete docílit srážky dvou jader již existujících a následně umět detekovat výsledný produkt, tedy nově vzniklé jádro. Vlastnosti pohybujících se jader a částic jsou probírány v příkladech 1 až 4 (vzhledem k rychlostem a energiím se často neobejdeme bez speciální teorie relativity), jejich vlastnosti v klidu naleznete v příkladech 5 – 8. Způsoby jejich urychlení ilustrují příklady 9, 10 a 12, 13 a s možností identifikace a určení hmotnosti se seznámíte v příkladu 11. Přesně zaměřit urychlené jádro, aby se srazilo s jiným jádrem, je kvůli jejich velikosti (10^{-15} m) takřka nemožné. Velká většina urychlených jader proletí terčem, aniž by došlo k jakékoliv reakci. Vypomáháme si zde statistikou, a šanci, že k žádané reakci dojde (pravděpodobnost reakce) popisujeme veličinou zvanou účinný průřez. Seznámí Vás s ní příklady 19 a 20. Vzniklé jádro většinou nežije příliš dlouho a záhy se různými způsoby rozpadá, o čemž se více dozvíte v příkladech 21-23. Nelekejte se rovnic ani jejich složitosti, na druhý pohled zjistíte, že jsou mnohem jednodušší, než se na počátku zdálo.

Pokud Vás dané téma zaujalo a chtěli byste se pokusit o vytvoření vlastního prvku, není nic snazšího, než si vybrat některý z jaderných oborů na českých vysokých školách (Matematicko-fyzikální fakulta UK, Filozoficko-přírodovědecká fakulta v Opavě Slezské univerzity, Fakulta jaderná a fyzikálně-inženýrská ČVUT, Vysoké učení technické v Brně a další). Již v rámci studia můžete mít možnost podílet se na činnostech jednoho ze světových center tvorby nových prvků – Spojeného ústavu jaderných výzkumů, kde je Česká republika členskou zemí.

Přeji Vám hodně zdarů,

Marek Vyšinka

Odbor výzkumu a vývoje MŠMT

V Řeži 16. srpna 2018

Úvod

V roce 1869 publikoval Dmitrij Ivanovič Mendělejev periodické zákonitosti v chemických vlastnostech prvků podle jejich protonového čísla (původně podle relativní atomové hmotnosti). Tabulce, která tyto zákonitosti zobrazuje, se tak od té doby říká Mendělejevova periodická tabulka prvků. V té době bylo známo 62 prvků a v tabulce byla řada bílých míst. O neznámých prvcích se však dalo z jejich polohy v tabulce vyčíst dostatek informací o jejich chemických i fyzikálních vlastnostech, které umožnily směřovat jejich hledání.

Až po olovo s protonovým číslem 82 existuje 81 prvků, které mají alespoň jeden stabilní izotop. Technecium žádný stabilní izotop nemá. Nejdější poločas rozpadu mají izotopy ^{97}Tc a ^{98}Tc , a to zhruba 4 miliony let. Během života hvězd a hlavně během konečného stadia těch velmi hmotných vzniká velké množství radioaktivních jader. Vzniká tak i radioaktivní technecium. Ovšem do současné doby, kdy je stáří Sluneční soustavy už 4,6 miliardy let, přežily pouze ty izotopy, jejichž poločas rozpadu je výrazně delší než 10 milionů let.

V přírodě se tak technecium vyskytuje jen v extrémně malém množství, které vzniká při štěpení uranu 235. To může proběhnout samovolně, nebo je indukováno záchytem neutronů vzniklých v jiných přírodních jaderných reakcích. Technecium se také vyskytuje v atmosférách rudých obrů, vzniká totiž v jaderných reakcích ve hvězdách. Proto bylo bílé místo pro technecium vyplněno až v roce 1937 a prvek byl vyprodukován uměle pomocí urychlovače.

Bismut s protonovým číslem 83 sice nemá stabilní izotop, ale izotop ^{209}Bi má poločas rozpadu $1,9 \cdot 10^{19}$ let, takže se vyskytuje v zemské kůře. V zemské kůře se vyskytují thorium s protonovým číslem 90 a uran s protonovým číslem 92, které mají poločas rozpadu srovnatelný s dobou existence Sluneční soustavy. Další prvky mezi počtem protonů 83 až 92 se produkují v kaskádě rozpadů thoria a izotopů uranu, které končí u různých stabilních izotopů olova. V omezené míře se tak na Zemi vyskytují i v přírodě. Prvky těžší než uran musí být vyprodukovány uměle a muselo se čekat na jaderné reaktory a urychlovače.

Na konci roku 2015 uznala komise Mezinárodní unie pro čistou a užitou chemii IUPAC (International Union of Pure and Applied Chemistry), že byla prokázána existence prvků s protonovým číslem 113, 115, 117 a 118. Hned čtyři nové supertěžké prvky doplnily konec Mendělejevovy tabulky prvků a umožnily uzavření její sedmé periody. Jména nových obyvatel světa prvků byla vyhlášena v polovině roku 2016 a jsou Nihonium (Nh), Moscovium (Mc), Tennessine (Ts) a Oganesson (Og). Po 150 letech od svého objevu má periodická tabulka prvků 118 obyvatel.

SKUPINA →	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
↓ PERIODA																			
1	1 H																		2 He
2	3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne	
3	11 Na	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar	
4	19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr	
5	37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe	
6	55 Cs	56 Ba	57 La	* 72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn	
7	87 Fr	88 Ra	89 Ac	* 104 Rf	105 Db	106 Sg	107 Bh	108 Hs	109 Mt	110 Ds	111 Rg	112 Cn	113 Nh	114 Fl	115 Mc	116 Lv	117 Ts	118 Og	
				* 58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu		
				* 90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr		

I sedmá perioda Mendělejevovy tabulky je nyní úplná (zdroj Wikimedia Commons).

A připravují se experimenty, které by počet prvků mohly dále rozšířit. Velice zajímavou otázkou je, po jaké protonové číslo se periodické opakování chemických vlastností bude projevovat. I z tohoto hlediska je produkce a chemie supertěžkých prvků velice zajímavou oblastí základního výzkumu. A je přímo fascinující, že lze identifikovat vznik daného prvku i v případě, že vyprodukuje jen jeden atom. Dokonce lze studovat chemické vlastnosti tohoto jediného atomu.

1 Chemické prvky

1.1 Chemické vlastnosti prvků a Mendělejevova tabulka

Víme, že veškerá hmota okolo nás i v nás je tvořena atomy. Ty se skládají z velice malého jádra, ve kterém je soustředěna téměř veškerá jeho hmotnost, a lehkých elektronů, které se nacházejí v prostoru s průměrem, který je téměř sto tisíckrát větší, než je rozměr jádra. Jádro se pak skládá z protonů a neutronů, které mají zhruba stejnou hmotnost. Tyto dvě částice se označují společným názvem nukleon. Protony mají elektrický náboj a neutrony jsou elektricky neutrální. Proton má stejnou velikost náboje, jako elektron. Jak elektrony, tak protony a neutrony jsou fermiony. Tedy částice, pro které platí Pauliho vylučovací princip a nemohou být dvě současně ve stejném stavu.

Kvantová fyzika dovoluje v některých případech pouze přesně definované diskrétní hodnoty některých veličin. Elektrony tak mohou být v atomu jen ve stavech s danými diskrétními hodnotami energie. Elektrony ve stavech se stejnou hodnotou

energie sedí na příslušné energetické hladině. Hladiny se grupují do skupin, které mají blízké hodnoty energií, tzv. energetických slupek. Mezi slupkami je naopak velký rozdíl v energii. Zároveň se opakují slupky s podobnými vlastnostmi. Zmíněné energetické hladiny se obsazují postupně, a to od nejnižší energie. Poslední slupka, která není plně obsazená, určuje chemické vlastnosti atomů. Její elektrony se označují jako valenční. Podobná situace nastává i v jádrech atomů s protony a neutrony, ale na jiných škálách, co se týče rozměrů a energií.

A právě popsané vlastnosti vedou k tomu, že můžeme pozorovat periodicky se opakující změny chemických vlastností v závislosti na růstu počtu protonů, a tedy i hmotnosti atomů. Chemické vlastnosti prvků jsou tak určeny a lze je předpovídat právě na základě jejich polohy v této tabulce. Jak bylo zmíněno, je v ní nyní sedm period a prvky v každé periodě mají podobné vlastnosti těm, které leží v předchozí periodě na stejném místě. Tyto prvky jsou ve stejné skupině a skupin je 18. Poslední prvky v periodě jsou v osmnácté skupině, která má plně obsazenou poslední valenční slupku a má vlastnosti inertního plynu. Kromě nejlehčího helia mají tyto vzácné plyny v názvu koncovku on. Máme tak neon, argon, krypton, xenon, radioaktivní radon a nyní také oganesson.

1.2 Jak se supertěžké prvky produkují?

K vytvoření atomu potřebujeme odpovídající jádro, které tvoří kladný iont. Záchytem odpovídajícího počtu elektronů pak získáme neutrální atom. Jádra supertěžkých prvků vznikají v jaderných reakcích. V přírodě se produkují pomocí velmi **intenzivního neutronového toku** vznikajícího při výbuchu supernovy nebo splnutí neutronových hvězd. Postupný záchyt velkého počtu neutronů a následné série rozpadů beta, při kterých se přeměňují neutrony na protony, produkují i extrémně těžké prvky.

Intenzivní tok neutronů nám na Zemi poskytnou jaderné reaktory nebo jaderné bomby. Jaderné reaktory jsou tak velmi efektivními nástroji pro výrobu transuranů. V produktech jaderných výbuchů byly v roce 1952 objeveny einsteinium s protonovým číslem 99 a fermium s protonovým číslem 100. Ovšem u reaktoru a jaderných výbuchů není tok neutronů dostatečný pro produkci supertěžkých prvků.

Ty lze získat pomocí urychlování stále těžších iontů a reakcí s odpovídajícím terčem z těžkých atomů. Energie iontů musí být dostatečná, aby projektil s vysokou pravděpodobností překonal odpuzování elektrických nábojů projektilového a terčového jádra. Druhou možností získání supertěžkého prvku je tedy **slučování dvojice jader**. Kinetická energie projektilu ale musí být zároveň co nejnižší, aby přebytečná energie nevedla k rozdělení vzniklého jádra. Zároveň musíme vybrat

vhodné jádro terče tak, aby požadované supertěžké jádro vzniklo jeho splnutím s odpovídajícím projektillem.

Pomocí terčů z transuranů (curia, americia a kalifornia) a urychlených iontů helia, uhlíku, kyslíku se podařilo mezi léty 1957 až 1974 vyprodukovat prvky až po seaborgium s protonovým číslem 106. Identifikace nového prvku probíhala pomocí chemické analýzy. Obrovským problémem je, že při postupu k těžším prvkům se jich dařilo produkovat stále menší množství. Zároveň měly získané izotopy daných prvků stále kratší poločasy rozpadu. Například izotop lawrencia ^{258}Lr má poločas rozpadu zhruba 4 s. Ohlašované objevy posledních čtyř prvků s protonovým číslem 103 až 106 proto nebyly dostatečně průkazné. Spory trvaly nakonec až do roku 1997, kdy teprve IUPAC rozsoudil prioritu objevů a pojmenování těchto prvků. Rozhodnutí bylo umožněno i vyřešením problému, jak postupovat k ještě těžším prvkům. Podařilo se najít metodu identifikace a zkoumání jednotlivých atomů.

Nalezená metoda je založena na tom, že transurany se mohou rozpadat dvěma typy rozpadů. Je to rozpad alfa, při kterém se emituje jádro helia a počet neutronů i protonů v jádře se změní o dva. Další možností je samovolné štěpení, při kterém se těžké jádro rozpadne na dvě středně těžká a emitují se dva nebo tři neutrony. Supertěžký prvek se tak rozpadá kaskádou rozpadů alfa, která končí u jádra s poměrně dlouhou dobou života nebo samovolným štěpením.

Pokud postavíme zařízení, které dokáže jádro vytvořit a zároveň je bezesporně identifikovat, máme vyhráno. Musíme tak mít urychlovač s velmi vysokou intenzitou svazku těžkých iontů, protože pravděpodobnost vzniku supertěžkého jádra je velmi malá. Terč, na který bude dopadat svazek, musí být dostatečně tenký, aby v něm vzniklé supertěžké jádro neztratilo moc energie či dokonce neuvázlo. Zároveň je terč třeba velmi efektivně chladit, protože bude velmi intenzivně ohříván. Pomocí vhodné kombinace elektrických a magnetických polí vybereme jádra, která se poměrem náboje a hmotnosti blíží hledanému. Tato jádra pak zachytíme v zastavovací fólii a tu obklopíme detektory částic alfa a také gama. Dceřiná jádra, která vznikají v rozpadu alfa, totiž nemusí být v základním stavu, ale mohou mít přebytek energie. Toho se zbaví emisí fotonů záření gama s přesně definovanou energií, které je umožňují identifikovat.

Pokud detektory zachytí všechny vyzářené částice alfa a podaří se identifikovat poslední jádra v rozpadové řadě, ať už pomocí známých vlastností rozpadu alfa či štěpení nebo energie vyzářených fotonů gama, máme přesně identifikováno i jádro na začátku. Může pomoci i rentgenovské záření vyzářené při vytváření elektronového obalu. K přesné identifikaci nového supertěžkého jádra i atomu tak stačí vyprodukovat jeden kousek.

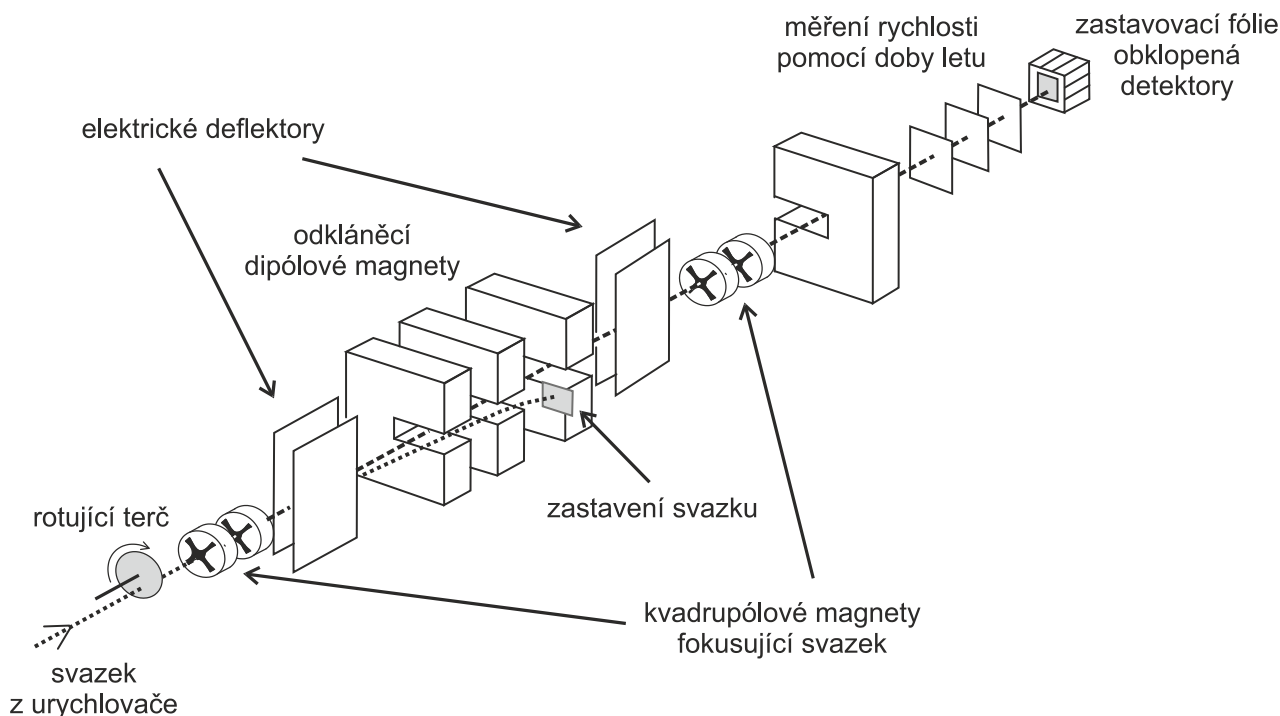


Schéma experimentu produkujícího supertěžké prvky. Velmi intenzivní svazek z urychlovače dopadá na intenzivně chlazený rotující tenký terč. Pak je třeba složitým systémem magnetických a elektrických polí oddělit ionty svazku, které prošly bez interakce a jednotlivá jádra vzniklá v různých reakcích. Je třeba co nejvíce vyčistit svazek požadovaných supertěžkých jader. K tomu slouží kvadrupólové a dipólové magnety i elektrické deflektory. Část svazku, která neinteragovala, se odkloní a pohltí. K co nejpresnější identifikaci se pak využívají i detektory, které identifikují průlet nabitého iontu a z doby letu a definované vzdálenosti pak určí jeho rychlost. Nakonec je supertěžké jádro zachyceno ve fólii, která je obklopena křemíkovými detektory pro detekci částic alfa a germaniovými detektory pro detekci záření gama.

1.3 Studená a horká fúze

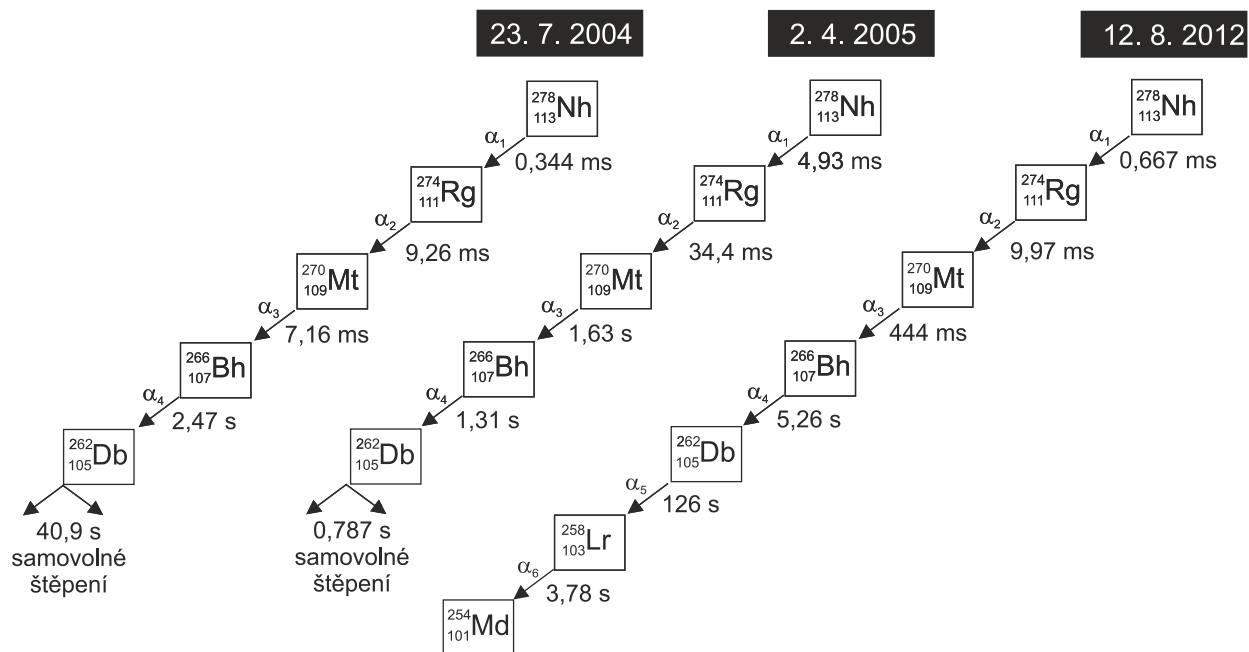
Poprvé vybudovala takové zařízení skupina v německé laboratoři GSI Darmstadt. Pro produkci supertěžkých jader využila kombinaci terče a projektilu, která umožňuje tzv. studenou fúzi navrženou fyziky ve Spojeném ústavu jaderných výzkumů (SÚJV)¹. Při ní se používá jako terč jádro, které má počet protonů a neutronů označovaný jako magický (viz následující část. 4.4). V tomto případě má jádro vysokou hodnotu vazebné energie a je velmi stabilní. Po sloučení jádra projektilu a jádra terče se velká část kinetické energie, kterou přinese jádro svazku, spotřebuje na kompenzaci vysoké vazebné energie terčového jádra. Vzniklé supertěžké jádro tak bude mít nižší přebytek energie a bude větší pravděpodobnost, že vydrží.

¹ SÚJV je mezinárodní výzkumná organizace sídlící v Dubně, Moskevská oblast, Rusko.

Jako terč se využívalo olovo ($^{208}_{82}\text{Pb}$) nebo bismut ($^{209}_{83}\text{Bi}$) s počty protonů a neutronů blízkými magickým a jako projektil jádro těžší než argon. Velice vhodný je izotop vápníku $^{48}_{20}\text{Ca}$. Ten je velice stabilní i pro vysoký relativní přebytek neutronů, protože má také magický počet protonů i neutronů. Přispívá tak také ke snížení excitační energie složeného jádra. Každý prvek s daným počtem protonů má řadu různých izotopů s odlišným počtem neutronů. Pomocí studené fúze se vhodným výběrem terče a projektilu produkuje izotopy supertěžkých prvků s daným poměrem neutronů a protonů. Protože rozpad alfa vždy odnáší dva protony a dva neutrony, končí sekvence rozpadů alfa u definovaného poměru počtů protonů a neutronů. Výhodou studené fúze je, že rozpadová řada v tomto případě končí u známých izotopů známých prvků a je dobře identifikovatelná. Nevýhodou pak to, že pro stále těžší supertěžká jádra dostáváme izotopy, které jsou velice nestabilní. Hranice, kde už možnost produkce touto metodou končí, je pravděpodobně prvek 114. Skupině v GSI Darmstadt se tak v osmdesátých a devadesátých letech podařilo vytvořit supertěžké prvky s protonovým číslem od 107 po 112 (bohrium, hassium, meitnerium, darmstadtium, roentgenium a kopernicium).

Možností, jak se dostat k ještě těžším prvkům, je tzv. horká fúze. V tomto případě se využívají jako terč co nejtěžší jádra, jde tak o uran a transurany. Tato jádra mají počty neutronů a protonů hodně vzdálené od magických. Mají tak nízkou hodnotu vazebné energie a složené jádro vzniklé splynutím projektilu a terče má hodně přebytečné energie a je větší pravděpodobnost jeho rozpadu. Využití terče z velmi těžkých prvků vede k jinému poměru protonů a neutronů. Ten na jedné straně způsobuje, že vzniklé izotopy supertěžkých prvků jsou blíže oblasti těch stabilnějších a můžeme tak získat ještě těžší prvky. Problémem však je, že sekvence rozpadů alfa končí u dosud neznámých izotopů známých prvků. Konec rozpadové řady tak není přesně identifikovatelný a je tak zpochybněna i identifikace vzniklého supertěžkého jádra, u kterého začíná. To byl i důvod, proč některé supertěžké prvky byly nejdříve vytvořeny pomocí horké fúze, ale k jejich oficiálnímu potvrzení došlo až produkcí pomocí fúze studené. A vavříny vítězů s možností nový prvek pojmenovat získala právě až skupina realizující studenou fúzi. Posledním takovým příkladem je právě prvek 113, jehož první izotopy byly získány horkou fúzí v SÚJV Dubna. Bezrozporná identifikace však byla přisouzena až japonské laboratoři RIKEN, kde se podařilo produkovat jiný izotop tohoto prvku pomocí fúze studené.

S využíváním horké fúze začal a největších úspěchů dosáhl právě ústav SÚJV Dubna. Ten velmi úzce spolupracoval s americkými laboratořemi ORNL v Oak Ridge (Tennessee) a LLNL v Livermoru (Kalifornie), které hlavně dodaly potřebné transurany pro terče.



Průběh rozpadů tří z celkově čtyř jader nihonia, které se podařilo pomocí studené fúze produkovat v japonské laboratoři RIKEN. Rozpadové řady izotopu ^{278}Nh končí samovolným štěpením u izotopu dubnia ^{262}Db , případně se tento izotop rozpadne rozpadem alfa až na izotop mendělejevia ^{254}Md , který se rozpadá rozpadem beta (elektronovým záchytem) a má poločas rozpadu 10 minut. Jeho rozpad už tak experimentální sestava nezachytí. I když je poločas rozpadu daného radioaktivního nuklidu přesně daný, čas existence konkrétního jeho jádra je náhodný. Jsou tak velké rozdíly v hodnotách v jednotlivých konkrétních případech rozpadové řady (viz obrázek). Určení poločasu rozpadu je tak v případě pozorování jednoho nebo několika málo rozpadů daného nuklidu možné udělat jen s velkou nejistotou. Izotop dubnia ^{262}Db byl produkován i jiným způsobem, než v rozpadu ^{278}Nh . Z celkových experimentálních dat tak víme, že poločas rozpadu je 35 s a nejistota této hodnoty 5 s. K rozpadu alfa dojde zhruba v 67 % případech. Tyto hodnoty můžeme srovnat s tím, co se pozorovalo ve třech případech rozpadové řady ^{278}Nh .

Zde se podařilo vytvořit řadu neznámých izotopů už zmiňovaných prvků s protonovým číslem do hodnoty 113, ale také těžších. Postupně se tak podařilo propojit oblast neznámých izotopů z horké fúze s těmi známými získanými pomocí fúze studené. A to byl důvod, proč mohla být uznána nejdříve existence prvků 114 a 116, kterým ruská a americké laboratoře daly jména flerovium (podle význačného ruského fyzika G. N. Flerova pracujícího na produkci supertěžkých prvků) a livermorium (právě podle místa, kde je jedna z amerických laboratoří). A na přelomu let 2015 a 2016 pak i prvky 115, 117 a 118, které dostaly názvy moscovium (podle Moskevské oblasti, kde je ústav SÚJV Dubna), tennessine (podle státu USA, kde leží laboratoř ORNL) a oganesson (podle vedoucího skupiny Ju. C. Oganjesjana, který v SÚJV Dubna na studiu supertěžkých prvků pracuje). V té době byl uznán i zmíněný prvek s protonovým

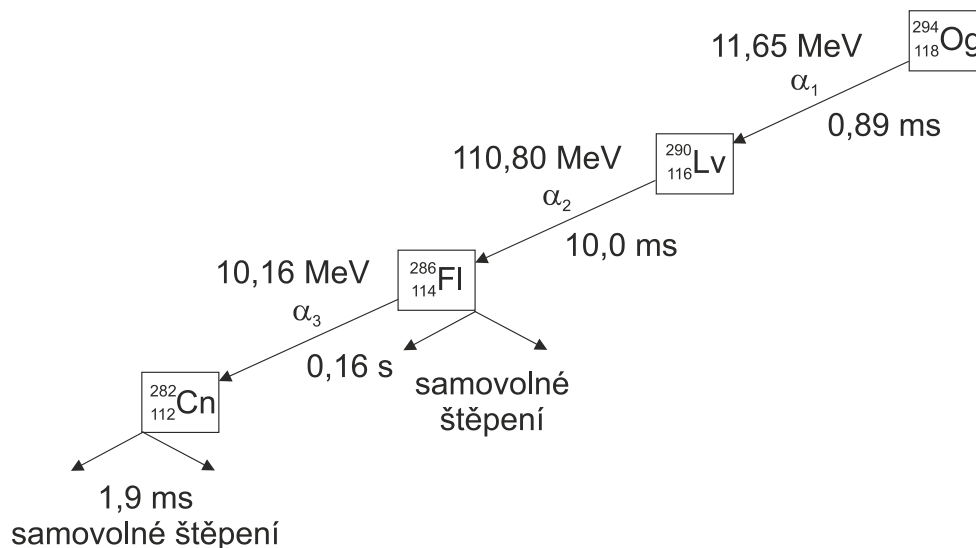


Schéma rozpadové řady izotopu oganessonu ^{294}Og získané z pěti pozorovaných případů.

číslem 113. Ten se podařil japonské skupině v laboratoři RIKEN vyprodukovat jako nejtěžší i pomocí studené fúze a dostal jméno nihonium (podle druhého označení Země vycházejícího slunce – Japonska).

1.4 Ostrov stability

Už bylo zmíněno, že některé konkrétní počty neutronů či protonů označované jako magická čísla vedou k tomu, že jádra jsou stabilnější. Jmenovitě, vysokou stabilitou se vyznačují atomová jádra s počty protonů 2, 8, 20, 28, 50 a 82 a neutronů 2, 8, 20, 28, 50, 82 a 126. Podobně jako u elektronového obalu jde o případy, kdy se uzavírají valenční slupky. V oblasti transuranových a supertěžkých prvků jsou podle teorie magickými čísly 114, 122, 124 a 164 pro protony a 184, 196, 236 a 318 pro neutrony, i když zde jde o extrapolaci a zatím pouze nepotvrzenou předpověď. Reálné hodnoty se mohou lišit. A právě existence magických počtů protonů či neutronů v oblasti izotopů supertěžkých prvků umožňuje jejich existenci. Bohužel studená i horká fúze nás zavádí mimo ostrov stability, který se v mapě izotopů prvků s různými počty protonů a neutronů díky magickým číslům vytváří. Takto vytvořené izotopy prvku mají menší počet neutronů, než by bylo potřeba. V případě různých izotopů daného supertěžkého prvku se ukazuje, že zvyšující se počet neutronů a přibližování k předpokládanému ostrovu stability vede i k prodloužení doby života těchto jader, viz Tabulka 1. Tím je experimentálně potvrzena jeho existence.

N	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177
Z											
118 Og (Oganesson)										0,0022	0,18
117 Ts (Tennessine)										0,014	0,05
116 Lv (Livermorium)								0,015	0,013	0,018	0,053
115 Mc (Moscovium)						0,03	0,17	0,22	0,24		
114 Fl (Flerovium)				0,003	0,15	0,16	0,51	0,80	2,7	21	
113 Nh (Nihonium)			0,07	0,10	0,48	5,5	20				
112 Cn (Kopernicium)			0,13	0,0005	4,0	0,101	34				
111 Rg (Roentgenium)	0,004	0,17	3,6	26	59						

Tab. 1 Poločasy rozpadu supertěžkých prvků (uvedeny v sekundách)

Zdroj: http://www.nndc.bnl.gov/nudat2/indx_adopted.jsp, doplněno z S. Hofmann et al: Eur. Phys. J. A (2016) 52: 180, DOI 10.1140/epja/i2016-16180-4

Zejména na izotopech roentgenia nebo kopernicia je vidět, že poločasy rozpadu se zvyšováním počtu neutronů a přibližováním k ostrovu stability rostou. Stejná tendence se pozoruje i u izotopů flerovia a nihonia. Nejsou uváděny nejistoty měření a ty jsou často velmi velké, jader bylo vyprodukováno jen pár. Extrémní situace je u jádra ^{295}Og ($Z=118$, $N=177$), kdy byl pozorován jeden sporný případ. Často tak jde spíše o řádové odhady. Takže i údaje se teprve zpřesňují a i v literatuře se velmi liší. Zde jde jen o celkový kvalitativní pohled.

Extrapolace našich experimentálních znalostí a teorie jaderné struktury neumožňují předpovědět doby života izotopů supertěžkých prvků na ostrovu stability. Předpovědi se pohybují ve velmi širokém rozmezí. Dokonce se hledaly tyto supertěžké prvky v přírodě, kde by mohly existovat v případě jejich dob života překračujících stovky milionů let. Vznikaly by v supernovách, kde existují extrémně intenzivní toky

neutronů. Podrobně je i tato část historie rozebrána v populárně pojaté knize G. N. Fljorova „Na cestě k novým prvkům“ [1], která vyšla i v českém překladu v osmdesátých letech. I přes své stáří je stále poučná i proto, že jde o popis historie z pohledu vědce, po kterém se jmenuje prvek flerovium. Nyní se předpokládají kratší doby života, stejně to však mohou být desítky i stovky let. A v tomto případě nelze vyloučit i možnost jejich praktického využití, pokud se vyřeší problém jejich hromadné produkce.

Zatím se však nepodařilo vyřešit ani to, jak vyprodukovat izotopy ležící na ostrově stability byť jen v jednom exempláři. I to je důvod, proč cesta k ještě těžším prvkům je ve velké mlze. Pomocí horké fúze bude ještě možné vytvořit nejspíše prvek s protonovým číslem 120 (prvky se sudým počtem protonů se produkují snadněji a jsou stabilnější). U dalších to bude velmi náročné. S největší pravděpodobností budeme potřebovat najít úplně jinou metodu. Mohlo by jít o **reakce s přenosem omezeného počtu nukleonů**, zvláště neutronů, z projektilu na terčové jádro. Problémem je, že pravděpodobnost pro přesně daný průběh reakce je velmi malá. Bude tak potřeba mít velmi intenzivní svazky iontů a velmi efektivní výběr vznikajících jader. Další možností je využití velmi intenzivních toků neutronů, podobných jako vznikají v supernovách. Zatím ovšem nemáme představu, jak takových intenzivních toků neutronů dosáhnout.

1.5 Chemie jednoho atomu

Spolu s výzkumem vlastností supertěžkých jader se daří studovat i chemické vlastnosti supertěžkých atomů. Podařilo se vyvinout řadu metod chemie s jedním atomem. Hlavním úkolem tohoto studia je ověřit, zda i pro sedmou periodu se zachovává periodicitu vlastností prvků v dané skupině. Dokumentujme si možnosti chemie jednoho atomu na zkoumání hassia s protonovým číslem 108, které je v osmé skupině. Prvky této skupiny v předchozích periodách jsou ruthenium a osmium. Jsou to ty prvky, které umožňují vznik osmimocného oxidu. Tím je notoricky známý oxid osmičelý a trochu méně známý oxid rutheničelý.

O oxidech rutheničelém a osmičelém se ví, že mají vysokou těkavost a namrznou až při velmi nízkých teplotách. Při experimentu se vzniklé jádro supertěžkého prvku hassia, které stihne oxidovat na oxid hassičelý, proudem plynného helia vyfukuje do tenké kapiláry. Ta je s rostoucí vzdáleností od jejího začátku stále více ochlazována. Kapilára je obklopena křemíkovými detektory pro zachycení částic alfa z rozpadu hassia. Pokud jde opravdu o oxid hassičelý, namrzne na stěnu kapiláry až někde na jejím konci v té nejstudenější části. Opravdu se ukázalo, že v případě

hassia je jeho sekvence rozpadů alfa pozorována až detektory na konci kapiláry. Pro kontrolu se ve stejných podmínkách testovalo i osmium a porovnávalo se místo vymrznutí jeho oxidu.

U prvků za hassiem je třeba zkontrolovat, zda následují chování prvků v předchozí periodě a jsou tedy kovy, které u konce periody přechází ve vzácné plyny. Tím by měl být prvek s protonovým číslem 118, tedy oganesson. V současné době jsou nejtěžšími prvky, u kterých se dělá chemie, prvek s protonovým číslem 112 kopernicium a prvek s číslem 114 flerovium. Studovala se jejich adsorpce na zlatém povrchu, tedy reaktivita se zlatem. Ukázalo se, že kopernicium, které je ve stejné skupině jako rtuť, se chová jako kov a má silnou reaktivitu. Flerovium, které je ve skupině s olovem, má reaktivitu daleko slabší, ale stále má kovové vlastnosti a není plynem. Nejtěžší prvky, které se zkoumaly v kapalném stavu, jsou ruthefordium, dubnium a seaborgium ($Z=106$). Nejtěžší prvek, který se zkoumal ve sloučenině, je už zmíněné hassium. Velice zajímavá sloučenina, kterou se podařilo připravit je hexacarbonyl seaborgia $Sg(CO)_6$.

Velkým otazníkem je, jak ovlivní chemické vlastnosti relativistické efekty. Hlavně vnitřní elektrony mají kvůli velkému náboji jádra a intenzivnímu elektrickému poli rychlosti blízké rychlosti světla. To může vést ke změnám elektronového obalu a i valenčních elektronů, které ovlivňují chemii daného prvku. Intenzivní studium chemických vlastností stále těžších prvků je tak velmi důležité. Velmi intenzivně se chemií supertěžkých prvků věnuje zařízení TASCA v GSI Darmstadt. V současné době se dokončuje několik vylepšení a rozšíření laboratoří, které se na danou oblast zaměřují. Příkladem je třeba laboratoř SÚJV Dubna, kde se staví nové zařízení SHE - factory (SuperHeavy Elements factory), tedy továrna na supertěžké prvky. Její nový urychlovač by měl umožnit řádově intenzivnější svazky potřebných iontů. I proto se můžeme těšit na řadu zajímavých informací i v případě, že se nepodaří těžší prvky než s protonovým číslem 118 vytvořit ještě dlouhou dobu.

V obou těchto zařízeních by se měla využívat i další metoda. Tou je laserová spektroskopie, při které se využívá excitace stavů v atomovém obalu. Přechody mezi těmito stavy pak můžeme identifikovat pomocí jejich excitace laserem a deexcitace. V tomto případě opět pracujeme s jednotlivými atomy či molekulami. Výhodou je, že zároveň lze atomy identifikovat i v případě, kdy nezaznamenáme rozpad alfa. To je důležité hlavně u dlouhodobých izotopů blízkých ostrovu stability. Rozvoj laserové spektrometrie v oblasti supertěžkých prvků je tak velmi důležitý.

2 Konkrétní fyzika spojená s produkcí a studiem supertěžkých prvků

Podívejme se na několik zajímavých oblastí fyziky, která s produkcí supertěžkých prvků souvisí. Přitom musíme nahlédnout do mikrosvěta a seznámit se s některými základními vlastnostmi nástrojů pro jeho popis. Těmi jsou kvantová fyzika a speciální teorie relativity. Zároveň je zde třeba využívat i specifické fyzikální jednotky, které dokáží přirozeně vyjadřovat velmi malé hodnoty různých veličin. Ty se týkají i atomových jader, jejichž základní vlastnosti si uvedeme.

Důležité jsou také zákonitosti kolem urychlování a využití elektrických a magnetických polí nejen v urychlovačích, ale také při identifikaci a separaci jader a částic i měření jejich hmotností. Rozebereme kinematiku spojenou s jadernými reakcemi a rozpady, ale také, jakými zákonitostmi se řídí rozpad jader v čase. Pravděpodobnost reakcí popisuje veličina zvaná účinný průřez. Částice, které vznikají při reakcích nebo se emitují při rozpadech, potřebujeme zachytit a určit jejich parametry pomocí detektorů. Nakonec je třeba znát i vlastnosti elektronového obalu supertěžkých prvků. Ten určuje jejich chemické vlastnosti i energii fotonů elektromagnetického záření vyzařovaných při přechodu elektronů v něm.

2.1 Nástroje a jednotky využívané v mikrosvětě

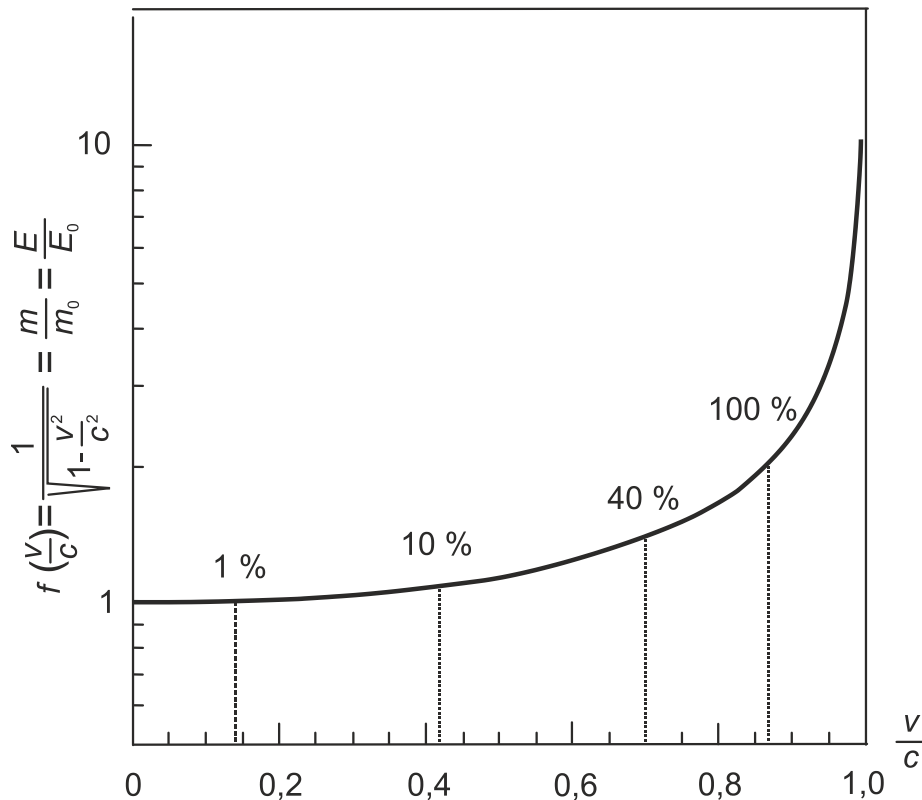
Při pohybu v mikrosvětě se setkáváme s extrémními hodnotami řady fyzikálních veličin. Je tak vhodné používat přiměřené jednotky a nutné fyzikální nástroje, tedy teorie, které umožňují popsat procesy a jevy na této úrovni.

Mikrosvět je na jedné straně svět extrémně malých hodnot některých veličin (velikost, vzdálenost, náboj, energie, hybnost ...), na druhé straně naopak některé veličiny mohou nabývat snadno hodnot extrémně velkých. Rychlost tak může být velmi blízká rychlosti světla. Tomu je dobré přizpůsobit rozměry veličin, které při řešení úloh z této oblasti využíváme.

Rozměr atomu je zhruba 10^{-10} m, tedy 0,1 nm. Je tak rozumné při popisu rozměrů atomů využívat jednotku nanometr. Rozměr jádra je zhruba 10^{-15} m, tedy 1 fm, zde se tak využívá jednotka femtometr. Velikost náboje elektronu je stejná jako protonu a v jednotkách SI je její současná experimentálně určená hodnota $1,6021766208 \cdot 10^{-19}$ C, [2]². Při řešení úloh vystačíme s přesností na čtyři platné cifry $1,602 \cdot 10^{-19}$ C. Náboj ve světě atomů, jader a elementárních částic je tak vhodné vyjadřovat v jednotkách náboje elektronu e . Pokud částici s nábojem $1 e$ urychlíme pomocí potenciálového rozdílu

² U experimentálních hodnot je vždy nutné uvádět přesnost měření, tedy nejistotu získané hodnoty. V našem případě nejistotu neuvádíme. Hodnota je uváděna s počtem platných cifer odpovídající nejistotě měření, kterou lze najít v odkazovaném zdroji.

(napětí) 1 V, získá kinetickou energii jeden elektronvolt (1 eV). Takto zavedená jednotka energie a její násobky (keV, MeV či GeV) se využívají při práci s veličinou energie v mikrosvětě. Protože kinetickou energii E_K získanou při urychlení náboje Q s využitím napětí U dostaneme ze vztahu $E_K = Q \cdot U$, platí pro vztah mezi elektronvoltem a jednotkou energie v SI (joulem): $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Uvádíme převod s přesností na čtyři platné cifry, která je dostačující pro většinu našich úloh.



Poměr celkové a klidové energie (relativistické a klidové hmotnosti) v závislosti na rychlosti objektu. Je vidět, že relativistické efekty (nárůst relativistické hmotnosti) přesáhnou hodnotu 1 % až pro rychlost 0,14 c, pro rychlost zhruba 0,87 c už dosahují 100 %.

První nutnou teorií, bez které se při popisu mikrosvětě neobejdeme, je speciální teorie relativity, viz studijní text FO o speciální teorii relativity [3]. Ta umožňuje popsat pohyb částic s rychlostmi blízkými rychlosti světla. Rychlosti částic jsou většinou v mikrosvětě o mnoho řádů větší než v našem známém prostředí a mohou se rychlosti světla dost blížit, proto je vhodné je vyjadřovat právě v jednotkách rychlosti světla. Vyjádřeno v jednotkách SI je to $1c = 2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Vzhledem k definici metru a sekundy je tato hodnota přesná. Pro většinu praktických úloh, které budeme řešit, stačí určitě přesnost na čtyři platné cifry, tedy $1c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Dominantně při číselném řešení vystačíme se třemi platnými ciframi $1c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ (pro

zkrácení zápisu postupu číselného řešení pak nebudeme psát nuly za desetinou tečkou). Relativní rychlost vzhledem k rychlosti světla potom značíme v/c .

U relativistických částic je kinetická energie srovnatelná s energií spojenou s klidovou hmotností objektu a je tak vhodné pracovat s celkovou energií E částice. Ta je dána její klidovou energií E_0 a kinetickou energií E_K :

$$E = E_0 + E_K \quad (1)$$

Klidová energie je dána slavným Einsteinovým vztahem:

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (2)$$

Poznámka: V jaderné fyzice se většinou využívá pouze klidová hmotnost a ta se pak označuje jako m . Ve fyzice urychlovačů a také na středních školách se však pracuje běžně i s relativistickou hmotností, která se označuje jako m a klidová hmotnost je tak m_0 . Proto jsme se rozhodli v tomto textu tyto pojmy s uvedeným označením využívat. V případě hmotností atomu m_a , jádra m_j a další jde o hmotnosti klidové, i když se zde zmíněná 0 v indexu neobjevuje.

Vztah mezi celkovou energií E , klidovou energií E_0 a rychlostí v je:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (3)$$

Vztah mezi celkovou energií E , klidovou energií E_0 a hybností p je pak:

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2 \quad (4)$$

Einsteinův vztah umožňuje vyjadřovat hmotnost nebo hybnost v energetických jednotkách. Hmotnosti částic tak lze vyjadřovat v MeV/c^2 či GeV/c^2 a hybnosti pak MeV/c a GeV/c .

Rozhodování, kde vystačíme s nerelativistickým přiblížením a zjednodušením řešení, a kde musíme zapojit speciální teorii relativity, závisí na přesnosti, kterou u řešení požadujeme. V běžném případě, například při urychlování na nerelativistickém urychlovači cyklotronu, vystačíme s nerelativistickým přiblížením do hodnoty rychlosti a kinetické energie, kdy je celková energie zhruba o jedno procento větší, než klidová. Hranicí je tak situace, kdy kinetická energie je zhruba jedno procento klidové energie a rychlost je přibližně $0,14 c$.

Částice	Hmotnost [MeV/c ²]	Hmotnost [m_u]
Elektron	0,510 999	0,000 548 580
Proton	938,272 081	1,007 276 467
Neutron	939,565 413	1,008 664 916
Deuteron (jádro ${}^2_1\text{H}$)	1 875,613	2,013 553
Triton (jádro ${}^3_1\text{H}$)	2 808,921	3,015 500
Alfa (jádro ${}^4_2\text{He}$)	3 727,379	4,001 506
Atomová hmotnostní jednotka	931,494 095	1,000 000 000

Tab. 2 Klidové hmotnosti některých částic

Poznámka: Přesnosti udávaných hmotností protonu, neutronu a atomové hmotnostní jednotky jsou takové, aby při výpočtech hmotností jader se stovkou protonů a stovkou neutronů byla nejistota v řádu tisíciny megaelektronvoltu, tedy jednoho kiloelektronvoltu (proto se hodnoty uvádějí na více desetinných míst, než je ve škole obvyklé). Přesnosti hmotností deuteronu, tritonu a částice alfa jsou takové, aby jejich hmotnost vnášela nejistotu ve zmiňované velikosti. V řadě výpočtů však postačí nižší přesnost a počet platných cifer je menší. Hodnoty hmotnosti částic a jader jsou převzaty z [2] a [4].

Stejně tak je při popisu částic v mikrosvětě potřeba využívat kvantovou fyziku. Jednou ze základních jejich vlastností je to, že každý objekt má zároveň vlnové a částicové vlastnosti. Světlo a elektromagnetické záření má tak nejen vlnové vlastnosti, ale také částicové. Energie a hybnost elektromagnetického záření se vyzařuje, pohlcuje i šíří v diskrétní kvantované podobě ve formě částic – fotonů.

Pro popis tohoto procesu a kvantového světa je potřeba speciální fundamentální konstanta – Planckova konstanta h . Jde o fyzikální veličinu, která má rozměr momentu hybnosti. V jednotkách soustavy SI je její experimentálně určená hodnota $h = 6,626\,070\,040 \cdot 10^{-34}$ J·s [2]. Při řešení našich úloh vystačíme s přesností na čtyři platné cifry $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J·s. V jednotkách běžně využívaných v mikrosvětě je to pak $h = 4,136 \cdot 10^{-15}$ eV·s, zde už uvádíme jen hodnotu s přesností na čtyři platné cifry. Velice často se využívá redukovaná hodnota Planckovy konstanty \hbar :

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}. \quad (5)$$

Velice vhodné je pak při výpočtech využívat součin redukované hodnoty Planckovy konstanty a rychlosti světla, který má snadno zapamatovatelnou hodnotu vyjádřenou v jednotkách spojených s mikrosvětlem (uvádíme hodnotu s přesností na čtyři platné cifry):

$$\hbar c = 197,3 \text{ MeV} \cdot \text{fm} = 197,3 \text{ eV} \cdot \text{nm}.$$

Elektromagnetické záření má nejen vlnovou, ale i částicovou povahu. Jeho částicí je foton. Energie fotonů je dána jejich frekvencí f nebo vlnovou délkou λ a dá se vyjádřit právě pomocí Planckovy konstanty:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}. \quad (6)$$

Naopak částice, jako jsou elektrony a protony, mají také vlnový charakter a svoji charakteristickou tzv. de Broglieho vlnovou délku λ :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar c}{pc} \Rightarrow pc = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}. \quad (7)$$

Ze vztahu je vidět, že de Broglieho vlnová délka λ je nepřímo úměrná hybnosti p .

Pokud využijeme relativistický vztah mezi celkovou energií E , hybností p a klidovou energií E_0 v případě fotonu a fakt, že klidová energie je v jeho případě nulová, dostaneme stejný vztah mezi vlnovou délkou a hybností, jako v případě částic s nenulovou klidovou hmotností:

$$E^2 = E_0^2 + p^2c^2 = 0 + p^2c^2 \Rightarrow E = pc. \quad (8)$$

Dosadíme-li za energii fotonu ze vztahu mezi jeho energií a vlnovou délkou (6), pak dostaneme i pro foton:

$$pc = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}.$$

Vlnová délka také ukazuje, jaká je nejistota v určení polohy dané částice. Pokud takovou částicí využíváme pro určení rozměru, či polohy, jiného objektu, nemůže být nejistota určení těchto veličin menší než její vlnová délka. Vzhledem k tomu, že je vlnová délka nepřímo úměrná hybnosti částice a tím i její energii, pro přesnější poznání co nejmenších detailů struktury hmoty potřebujeme urychlovat částice na co nejvyšší energie. I to je důvod, proč se budují stále větší výzkumné urychlovače.

Příklad 1: Částice alfa má kinetickou energii 98 MeV, jaká je její rychlost, hybnost a de Broglieho vlnová délka? Pro řešení využijte konstanty uvedené výše.

Kinetická energie je v tomto případě pouze 2,6 % klidové, nejdříve proto určíme požadované veličiny v **nerelativistickém** přiblížení. Vztah mezi kinetickou energií E_k a rychlostí v je:

$$E_k = \frac{m_0 v^2}{2} = \frac{m_0 c^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2}{2} = \frac{E_0 \left(\frac{v}{c}\right)^2}{2}. \quad (9)$$

Určíme podíl rychlosti částice a rychlosti světla:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2E_k}{E_0}}. \quad (10)$$

Číselně:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2 \cdot 98 \text{ MeV}}{3 \, 727,4 \text{ MeV}}} = 0,229 \, 31.$$

Vztah mezi kinetickou energií E_k a hybností p je:

$$E_k = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{p^2 c^2}{2m_0 c^2}. \quad (11)$$

Vyjádříme součin hybnosti p a rychlosti světla c :

$$pc = \sqrt{2m_0 c^2 \cdot E_k} = \sqrt{2E_0 \cdot E_k}. \quad (12)$$

Číselně:

$$pc = \sqrt{2 \cdot 3 \, 727,4 \text{ MeV} \cdot 98 \text{ MeV}} = 854,7 \text{ MeV}.$$

Pomocí vztahů (7) a (12) určíme vztah mezi de Broglieho vlnovou délkou λ a kinetickou energií E_k :

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{pc} = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{2E_0 \cdot E_k}}. \quad (13)$$

Číselně:

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi \cdot 197,3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{854,7 \text{ MeV}} = 1,45 \text{ fm}.$$

Přesný **relativistický** vztah mezi celkovou energií E a klidovou energií E_0 je:

$$E = E_0 + E_k = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (14)$$

Umocníme:

$$(E_0 + E_k)^2 = \frac{E_0^2}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)} \Rightarrow 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{E_0^2}{(E_0 + E_k)^2}.$$

Vyjádříme rychlost částice alfa v :

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{E_0^2}{(E_0 + E_k)^2}}. \quad (15)$$

Číselně:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{(3\,727,4 \text{ MeV})^2}{(3\,727,4 \text{ MeV} + 98 \text{ MeV})^2}} = 0,224\,90.$$

Vztah mezi celkovou energií E , hybností p a klidovou energií E_0 je:

$$E^2 = (E_0 + E_k)^2 = E_0^2 + p^2 c^2 \Rightarrow p^2 c^2 = 2E_k E_0 + E_k^2.$$

Součin hybnosti a rychlosti světla je:

$$pc = \sqrt{2E_k E_0 + E_k^2}. \quad (16)$$

Číselně:

$$pc = \sqrt{2 \cdot 98 \text{ MeV} \cdot 3\,727,4 \text{ MeV} + (98 \text{ MeV})^2} = 860,3 \text{ MeV}.$$

Vyjádříme de Broglieho vlnovou délku λ , využijeme vztahy (7) a (16):

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{pc} = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{2E_k E_0 + E_k^2}}. \quad (17)$$

Číselně:

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi \cdot 197,3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{860,3 \text{ MeV}} = 1,44 \text{ fm}.$$

Rychlost alfa částice je $0,225 c$, hybnost pak $860,3 \text{ MeV}/c$ a de Broglieho vlnová délka $1,44 \text{ fm}$. Rychlost určená v nerelativistickém přiblížení je o $1,96 \%$ větší než rychlost spočítaná relativisticky.

Příklad 2: Elektron z rozpadu beta má kinetickou energii $0,560 \text{ MeV}$. Jaká je jeho hybnost, rychlost a vlnová délka?

Kinetická energie je srovnatelná s klidovou energií (viz Tab. 2), je tak třeba počítat relativisticky. Využijeme vztah (15) mezi rychlostí a klidovou energií E_0 s kinetickou energií E_k , číselně:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{(0,511 \text{ MeV})^2}{(0,511 \text{ MeV} + 0,560 \text{ MeV})^2}} = 0,878 \text{ 8.}$$

Vyjádríme hybnost p pomocí kinetické E_k a klidové E_0 energie ze vztahu (16), číselně:

$$pc = \sqrt{2 \cdot 0,560 \text{ MeV} \cdot 0,511 \text{ MeV} + (0,560 \text{ MeV})^2} = 0,941 \text{ MeV.}$$

De Broglieho vlnovou délku λ je možno získat ze vztahu (17), číselně:

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi \cdot 197,3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{0,941 \text{ MeV}} = 1317 \text{ fm} = 1,317 \text{ pm.}$$

Kdybychom použili nerelativistický vztah mezi kinetickou energií E_k a rychlostí v , je dán rovnicí (10) a číselně:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,560 \text{ MeV}}{0,511 \text{ MeV}}} = 1,48 \text{ tedy nesmysl.}$$

Rychlost elektronu z rozpadu je $0,88 c$, hybnost pak $0,941 \text{ MeV}/c$ a de Broglieho vlnová délka $1,32 \text{ pm}$, Rychlost určená v nerelativistickém přiblížení je $1,5c$, překračuje rychlost světla a je tak jasně nesmyslná.

Příklad 3: Jaká je vlnová délka fotonů s energií 3 eV a 40 keV , jaká je jejich frekvence a hybnost? Jaký počet fotonů vyzáří zdroj o výkonu 10 W za jednu sekundu? Při řešení využijte konstanty uvedené výše.

Poznámka: Frekvence se v této oblasti elektromagnetického spektra v praxi nepoužívá, setkáváme se s ní u radiového nebo mikrovlnného záření, přesto je ale zajímavé se na její hodnoty podívat i v tomto případě.

Vyjádríme vlnovou délku λ v závislosti na energii fotonu E ze vztahu (6):

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{E}. \quad (18)$$

Číselně:

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi \cdot 197,3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{3 \text{ eV}} = 413,2 \text{ nm,}$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi \cdot 197,3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{40\,000 \text{ eV}} = 0,030\,98 \text{ nm} = 30,99 \text{ pm}.$$

Vztah mezi frekvencí f a vlnovou délkou λ získáme také ze vztahu (6), případně ji můžeme určit jako podíl rychlosti c a vlnové délky λ . Vlnovou délku vyjádříme ze vztahu (18):

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{Ec}{2\pi\hbar c}.$$

Číselně:

$$f = \frac{3 \text{ eV} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2 \cdot \pi \cdot 197,3 \text{ eV} \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 0,726 \cdot 10^{15} \text{ Hz} = 0,726 \text{ PHz}.$$

$$f = \frac{40\,000 \text{ eV} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2 \cdot \pi \cdot 197,3 \text{ eV} \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 9,68 \cdot 10^{18} \text{ Hz} = 9,68 \text{ EHz}.$$

Hybnost fotonu p vyjádřenou pomocí energetických jednotek dostaneme ze vztahu (8):

$$p = \frac{E}{c}. \quad (19)$$

Hybnosti fotonů tak jsou $3 \text{ eV}/c$ a $40 \text{ keV}/c$.

Počet fotonů vyzářených za časovou jednotku $\frac{N}{t}$ závisí na výkonu P zdroje a energii E jednoho fotonu:

$$P = \frac{NE}{t} \Rightarrow \frac{N}{t} = \frac{P}{E}. \quad (20)$$

Číselně:

$$\frac{N}{t} = \frac{10 \text{ W}}{3 \text{ eV} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} = 2,08 \cdot 10^{19} \text{ s}^{-1},$$

$$\frac{N}{t} = \frac{10 \text{ W}}{40000 \text{ eV} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} = 1,56 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}.$$

Fotony s energiemi 3 eV a 40 keV mají vlnovou délku $413,2 \text{ nm}$ (světlo fialové barvy), $30,99 \text{ pm}$ (vysokoenergetické rentgenovské záření), frekvenci $0,726 \text{ PHz}$ a $9,68 \text{ EHz}$ a hybnost $3 \text{ eV}/c$ a $40 \text{ keV}/c$. Počet fotonů vyzářených za sekundu je pak postupně $2,08 \cdot 10^{19}$ a $1,56 \cdot 10^{15}$.

Příklad 4: Na jakou energii musí být urychlen proton a elektron, aby „mohly rozlišit“ jednotlivé nukleony v jádře?

Rozměry nukleonu, ať už protonu či neutronu, jsou v řádu femtometru. A srovnatelnou de Broglieho vlnovou délku λ musí mít i proton či elektron, který jej má v jádře rozlišit. Využijeme tak vztah (7):

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{pc} \Rightarrow pc = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}.$$

Využijeme vztah (4) mezi celkovou energií E a hybností p a dosadíme za pc ze vztahu (7):

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2 = E_0^2 + \left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda}\right)^2 \Rightarrow E = \sqrt{E_0^2 + \left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda}\right)^2}.$$

Kinetická energie E_k pak je:

$$E_k = E - E_0 = \sqrt{E_0^2 + \left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda}\right)^2} - E_0. \quad (21)$$

Číselně:

$$E_k(p) = \sqrt{(938,3 \text{ MeV})^2 + \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot 197,3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{1 \text{ fm}}\right)^2} - 938,3 \text{ MeV} = 616 \text{ MeV},$$

$$E_k(e) = \sqrt{(0,511 \text{ MeV})^2 + \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot 197,3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{1 \text{ fm}}\right)^2} - 0,511 \text{ MeV} = 1\,238 \text{ MeV}.$$

Kinetická energie protonů, aby byla jejich de Broglieho vlnová délka srovnatelná s rozměrem nukleonu, musí být zhruba 600 MeV a více, u elektronu musí být energie větší než 1 GeV. Za zmínku stojí, že v případě elektronu je jeho klidová energie zanedbatelná vůči kinetické.

2.2 Vlastnosti jader

Jádro se skládá z nukleonů dvojího druhu, protonů a neutronů. Protony jsou nabitě a neutrony neutrální. Počet protonů, který udává protonové číslo Z (někdy označováno jako atomové číslo), tak určuje náboj jádra. Proton má stejnou velikost náboje jako elektron. Náboj protonu je však kladný a elektronu záporný. Neutrální atom má tak stejný počet elektronů jako protonů. Počet protonů tak udává jeho chemické vlastnosti. Celkový počet nukleonů udává nukleonové číslo A . Počet neutronů je dán rozdílem $N = A - Z$.

Hmotnost elektronu je zhruba 2 000krát menší než hmotnost protonu. Současná nejpřesnější hodnota tohoto poměru je 1 836,152 673 89, s přesností na čtyři platné cifry, jak to postačuje v našich úlohách, je to 1836. Z toho vyplývá, že dominantní část hmotnosti atomu je soustředěna v jádře. V prvním přiblížení je hmotnost jádra součtem hmotností jeho protonů a neutronů. Ve skutečnosti je však nižší a rozdíl může být až skoro jedno procento. Rozdíl mezi součtem hmotností nukleonů v jádře a jeho skutečnou hmotností je označován jako hmotnostní úbytek (defekt) a je roven vazebné energii jádra dělené druhou mocninou rychlosti světla.

Vazebná energie se v jaderné fyzice definuje jako energie, kterou je potřeba dodat, aby z jádra vznikl systém volných nukleonů. Jde tak i o energii, která se uvolní, jestliže z volných nukleonů vznikne dané jádro. V případě vázaného systému je tak hodnota vazebné energie kladná. Pro systém, ve kterém převládá odpuzivá síla, a nemůže být vázaný, je pak hodnota vazebné energie záporná.

Nukleony drží v jádře pohromadě silná jaderná interakce. Ta má velmi krátký dosah, zhruba 1 fm, ale je mnohem silnější než elektrická odpuzivá síla, kterou na sebe působí v jádře protony. Proto je vazebná energie jádra dobře pozorovatelná v jeho hmotnosti. To je rozdíl oproti energii chemické vazby atomů v molekule, jejíž vliv na hmotnost molekuly je zanedbatelný. Velikost vazebné energie jádra na jeden nukleon je mezi 7 MeV až 9 MeV. Typické energie molekulární vazby nepřesahují hodnoty v jednotkách elektronvoltu.

Velice často se udává hmotnost atomu v atomových hmotnostních jednotkách, což je jedna dvanáctina hmotnosti atomu uhlíku $^{12}_6\text{C}$. V energetických jednotkách je to 931,494 MeV/ c^2 . Hovoříme pak o relativní atomové hmotnosti A_r . Hmotnost atomového jádra je pak hmotnost atomu mínus hmotnost jeho atomového obalu. Pomocí relativní atomové hmotnosti pak lze s využitím Avogadrovy konstanty určit počet atomů v látce zadané hmotnosti či objemu. Avogadrova konstanta N_A definuje, kolik je atomů v 12 kg uhlíku $^{12}_6\text{C}$. Hodnota Avogadrovy konstanty je $6,022 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$.

Jádra nemusí mít kulový tvar, existuje i řada deformovaných jader. Při měření rozměru jader se ukázalo, že objem jádra roste přibližně lineárně s počtem nukleonů, poloměr pak roste přibližně s třetí odmocninou počtu nukleonů a můžeme jej za předpokladu kulového tvaru vyjádřit vztahem:

$$R = R_0 \cdot \sqrt[3]{A}. \quad (22)$$

Konstanta R_0 se dostává z měření poloměru jader pomocí rozptylu částic. V případě využití elektronů jde o poloměr citlivý k náboji a rozložení protonů. Tyto poloměry jsou menší a hodnota R_0 vychází zhruba okolo 1,2 fm až 1,3 fm. Při využití protonů

dominuje silná jaderná interakce citlivá ke všem nukleonům, tedy i neutronům, a poloměry vychází vyšší. Hodnota R_0 je pak mezi hodnotami 1,4 fm a 1,45 fm. Při našich výpočtech využijeme hodnotu 1,3 fm.

Protože hmotnost jádra i jeho objem rostou lineárně s počtem nukleonů, je hustota na počtu nukleonů nezávislá. Rozložení náboje a hmoty v jádře se studuje pomocí rozptylu elektronů nebo protonů urychlených na velmi vysoké energie na jádře (jaká je potřeba, nám řekl příklad 4). Ukazuje se, že hustota náboje i hmoty se od středu k povrchu příliš nemění.

V prvním přiblížení můžeme při popisu elektrických sil spojených s elektrickým nábojem považovat jádro za nabitou kouli v případě sféricky symetrického tvaru nebo za nabitý elipsoid v případě deformovaného jádra. Můžeme pak využít znalosti z klasické elektrostatiky, viz studijní text FO o elektrostatice [5].

Poznámka: Je třeba upozornit, že ve zmíněném studijním textu FO o elektrostatice je jiná definice energie elektrostatické vazby. Jde zde o potenciální energii vázaného systému elektrických nábojů. Při takové definici je vazebná energie vázaného systému záporná. V našem textu se budeme držet definice energie vazby využívané v jaderné fyzice i v případě energie elektrostatické vazby a budeme tak mít opačné znaménko oproti zmíněnému textu. Odlišné definice vedou pouze k opačným znaménkům.

Sílu elektromagnetické interakce v mikrosvětě charakterizuje konstanta jemné struktury α , která je její vazbovou konstantou. Výhodné je její využití při popisu působení elektrických sil v mikrosvětě i díky tomu, že se její hodnota s přesností na čtyři platné cifry snadno pamatuje (v našich úlohách vystačíme s přesností na tři až pět platných cifer) [2]:

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137,035\,999\,139} \approx \frac{1}{137,036} \approx \frac{1}{137}$$

Příklad 5: Relativní atomová hmotnost izotopu hassia ${}_{108}^{269}\text{Hs}$ je $A_r = 269,133\,725$. Jaká je hmotnost neutrálního atomu, jaká je hmotnost jádra? Jaká je jeho vazebná energie a vazebná energie na jeden nukleon?

Hmotnost neutrálního atomu m_a je násobek relativní atomové hmotnosti A_r a atomové hmotnostní jednotky m_u . Vyjádříme ji v energetických jednotkách:

$$m_a = A_r \cdot m_u. \quad (23)$$

Číselně:

$$m_a = 269,133\,725 \cdot 931,494\,095 \frac{\text{MeV}}{c^2} = 250\,696,476 \frac{\text{MeV}}{c^2}.$$

Hmotnost atomového jádra m_j je hmotnost atomu m_a mínus hmotnosti elektronů (je třeba upozornit, že v daném případě se zanedbává vazebná energie elektronů v atomu):

$$m_j = A_r \cdot m_u - Z \cdot m_e. \quad (24)$$

Číselně:

$$\begin{aligned} m_j &= 269,133\,725 \cdot 931,494\,095 \frac{\text{MeV}}{c^2} - 108 \cdot 0,510\,999 \frac{\text{MeV}}{c^2} = \\ &= 250641,288 \frac{\text{MeV}}{c^2}. \end{aligned}$$

Vazebná energie E_j je rozdíl mezi součtem klidových energií protonů a neutronů a klidové energie jádra:

$$E_j = [Z \cdot m_p c^2 + (A - Z) \cdot m_n c^2] - m_j c^2. \quad (25)$$

Číselně

$$\begin{aligned} E_j &= [108 \cdot 938,272\,081 \text{ MeV} + (269 - 108) \cdot 939,565\,413 \text{ MeV}] \\ &\quad - 250\,641,288 \text{ MeV} = 1\,962,129 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Vazebná energie na jeden nukleon je:

$$\varepsilon_j = \frac{E_j}{A} = \frac{1\,962,129 \text{ MeV}}{269} = 7,294 \text{ MeV}.$$

Hmotnost neutrálního atomu hassia je $250\,696,476 \text{ MeV}/c^2$, hmotnost atomového jádra $250\,641,288 \text{ MeV}/c^2$, vazebná energie $1\,962,129 \text{ MeV}$ a vazebná energie na jeden nukleon $7,294 \text{ MeV}$. Připomeňme, že vazebná energie na jeden nukleon je u středně těžkých jader (oblast okolo jejího maxima u jader Fe a Ni) větší než $8,5 \text{ MeV}$.

Příklad 6: Odhadněte hustotu jádra, jestliže víte, že poměr mezi rozměrem atomu a jádra je zhruba pět řádů a znáte hustotu vody.

Zatímco rozměry atomů jsou v řádu desetin nanometru, rozměry jader jsou v jednotkách femtometru. Tedy, jak bylo zmíněno, o pět řádů menší. Pokud budeme předpokládat, že atomy se v molekule vody zhruba dotýkají, po jejich kontrakci na rozměr jader se jejich objem zmenší s třetí mocninou zmenšení jejich rozměru. Objem jádra je oproti objemu atomu menší 10^{15} krát. Hustota vody je $1000 \text{ kg}/\text{m}^3$. Hmotnost při kontrakci zůstává stejná, objem se zmenší o patnáct řádů, stejným poměrem se zvětší hustota. Hustota jádra je tak zhruba $10^{18} \text{ kg}/\text{m}^3$. Taková je zhruba i hustota neutronových hvězd. Je třeba si uvědomit, že zde jde pouze o řádový odhad s řadou

zanedbání. V případě vody jde například o molekulu a různé atomy a jádra mají rozdílné rozměry.

Příklad 7: Jaká je hmotnost, vazebná energie a vazebná energie na jeden nukleon u jádra berkelia ^{249}Bk ($A_r = 249,074\ 983$), jaký je jeho poloměr za předpokladu, že jde o kouli s poloměrem daným jednoduchou lineární aproximací? Jaká je jeho hustota? Jaká je nukleonová hustota?

Hmotnost atomového jádra vyjádříme pomocí vztahu (24). Číselně:

$$m_j = 249,074\ 983 \cdot 931,494\ 095 \frac{\text{MeV}}{c^2} - 97 \cdot 0,510\ 99 \frac{\text{MeV}}{c^2} = 231\ 962,309 \frac{\text{MeV}}{c^2}.$$

Vazebná energie E_j je rozdíl mezi součtem klidových energií protonů a neutronů a klidové energie jádra. Vyjádříme ji pomocí vztahu (25). Číselně:

$$E_j = [97 \cdot 938,272\ 081 \text{ MeV} + (249 - 97) \cdot 939,565\ 413 \text{ MeV}] - 231\ 962,309 \text{ MeV} = 1\ 864,026 \text{ MeV}.$$

Vazebná energie na jeden nukleon je:

$$\varepsilon_j = \frac{1\ 864,026 \text{ MeV}}{249} = 7,486 \text{ MeV}.$$

Předpokládáme kulový tvar jádra, poloměr tak je dán vztahem (22):

$$R = R_0 \sqrt[3]{A}.$$

Číselně:

$$R = 1,3 \text{ fm} \sqrt[3]{249} = 8,2 \text{ fm}.$$

Hustota jádra ρ je:

$$\rho = \frac{m_j}{V} = \frac{m_j}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{A_r \cdot m_u - Z \cdot m_e}{\frac{4}{3}\pi R_0^3 A}. \quad (26)$$

Číselně:

$$\rho = \frac{231\ 962,285 \text{ MeV}/c^2}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (1,3 \text{ fm})^3 \cdot 249} = \frac{101,3 \text{ MeV}}{(c^2 \text{ fm}^3)} = \frac{101,3 \cdot 10^6 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 (10^{-15} \text{ m})^3} = 1,8 \cdot 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Nukleonová hustota je:

$$\frac{A}{V} = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R_0^3 A} = \frac{3}{4\pi R_0^3}.$$

Číselně:

$$\frac{A}{V} = \frac{3}{4 \cdot \pi \cdot (1,3 \text{ fm})^3} = 0,11 \text{ fm}^{-3}.$$

Hmotnost atomového jádra berkelia je $231\,962,309 \text{ MeV}/c^2$, vazebná energie $1\,864,026 \text{ MeV}$ a vazebná energie na jeden nukleon $7,486 \text{ MeV}$. Jeho poloměr je $8,2 \text{ fm}$, hustota $1,8 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$ a nukleonová hustota $0,11$ nukleonů na krychlový femtometr.

Příklad 8: Jaký je poloměr a energie elektrostatické vazby jádra ^{209}Bi ($A_r = 208,980\,399$)? Jaká je celková vazebná energie a energie silné jaderné vazby u bismutu 209? Jaká je coulombovská bariera u reakce $^{70}\text{Zn} + ^{209}\text{Bi}$?

Budeme předpokládat poloměr podle vztahu (22):

$$R_{Bi} = R_0 \sqrt[3]{A_{Bi}}.$$

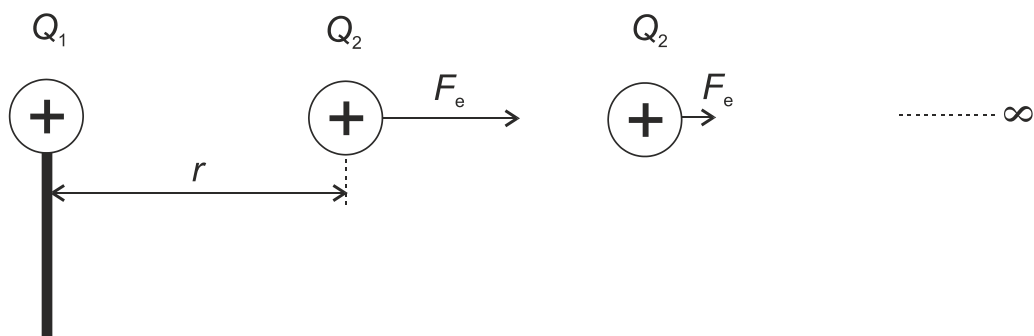
Číselně:

$$R_{Bi} = 1,3 \text{ fm} \sqrt[3]{209} = 7,7 \text{ fm}.$$

Dříve než se budeme věnovat vazebným energiím, určíme coulombovskou bariéru EC. Tu musí překonat iont svazku, aby mohla proběhnout interakce pomocí silné jaderné síly. Ta má totiž krátký dosah, pouze zhruba 1 fm . Hranice jejího působení je tak dána povrchem jádra. Vyjdeme proto z předpokladu, že v prvním přiblížení je to potenciální elektrická energie dvou jader v okamžiku, kdy se dotýkají a začne mezi nimi působit silná jaderná síla, která odpudivou elektrostatickou sílu překoná. Můžeme předpokládat, že jde o potenciální elektrickou energii E_{pe} dvou bodových nábojů (mají náboje jader) ve vzdálenosti R rovné součtu poloměrů jader, která se odpuzují.

Mějme dva kladné náboje Q_1 a Q_2 , pevně umístěné ve vzdálenosti R . Jakou potenciální elektrickou energii E_{pe} má tato soustava?

1. Definujme, že pro R jdoucí k nekonečnu je E_{pe} rovna nule.
2. Pro vzdálenost R bude E_{pe} rovna práci, kterou vykoná elektrické pole při přenesení náboje Q_2 ze vzdálenosti R do nekonečna.



Coulombovskou bariéru můžeme určit jako práci, kterou vykoná elektrostatická síla působící mezi náboji Q_1 a Q_2 při přenesení náboje Q_2 ze vzdálenost R do nekonečna.

Náboj Q_1 zůstane na místě a náboj Q_2 se bude vzdalovat. Aktuální vzdálenost označíme r , náboje na sebe působí Coulombovou odpudivou silou F_e :

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2}. \quad (27)$$

Protože síla F_e se vzdáleností klesá, nelze jednoduše počítat práci síly $W = F_e \cdot r$. (je třeba využít integrování a integrály, viz text FO [6, 7, 8])³:

$$\begin{aligned} W &= \int_R^\infty F_e dr = \int_R^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2} dr = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2}, \\ W &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_R^\infty = 0 - \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{R} \right], \\ W &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R} = E_{pe}. \end{aligned} \quad (28)$$

Práce, kterou pole při přenesení náboje do nekonečna vykonalo je rovna polohové elektrické energii, kterou soustava původně měla. Pokud budeme chtít náboje znovu k sobě přiblížit, musíme vykonat stejně velkou práci. V našem případě je vzdálenost nábojů dána součtem poloměrů jader $R = R_{Zn} + R_{Bi}$ a coulombovská bariéra je pak

³ Integrálu se není třeba obávat. Můžeme si je v prvním přiblížení představit jako součet velmi mnoha velmi malých kousků, z nichž každý sestává z funkční hodnoty vynásobené malým posunutím, v tomto případě $F_e \cdot dr$, kde malými posunutími dr postupně projdeme celý interval od R do ∞ . Jestli vám to připomíná plochu obdélníku ($a \cdot b$), tak to není náhoda. Integrálem totiž vypočítáme velikost plochy pod grafem nejrůznějších funkcí jako součet malých obdélníčků. Mnohem přesněji viz odkazovaná literatura.

rovna polohové energii dvou bodových nábojů rovných nábojům jader s touto vzdáleností:

$$E_C = E_{pe} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_{Zn}Z_{Bi}e^2}{(R_{Zn} + R_{Bi})}. \quad (29)$$

Dosadíme za poloměry jader a využijeme konstantu jemné struktury α :

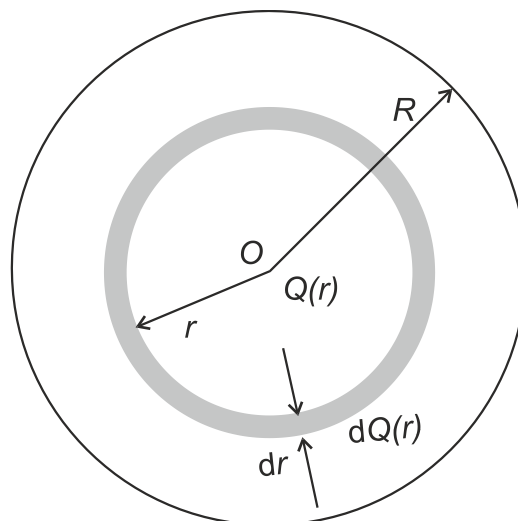
$$E_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_{Zn}Z_{Bi}e^2}{(R_0\sqrt[3]{A_{Zn}} + R_0\sqrt[3]{A_{Bi}})} \frac{\hbar c}{\hbar c} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{Z_{Zn}Z_{Bi}\hbar c}{R_0(\sqrt[3]{A_{Zn}} + \sqrt[3]{A_{Bi}})},$$

$$E_C = \alpha \frac{Z_{Zn}Z_{Bi}\hbar c}{R_0(\sqrt[3]{A_{Zn}} + \sqrt[3]{A_{Bi}})}. \quad (30)$$

Číselně:

$$E_C = \frac{1}{137} \frac{30 \cdot 83 \cdot 197,3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{1,3 \text{ fm}(\sqrt[3]{70} + \sqrt[3]{209})} = 274,2 \text{ MeV} \approx 274 \text{ MeV}.$$

V další úvaze budeme jádro považovat za kouli o náboji Q a poloměru R s nábojem rozloženým homogenně v celém objemu. Určíme energii E_e elektrostatické vazby jádra jako práci potřebnou k vytvoření takové nabitě koule. Využijeme znalosti, které jsme získali při řešení coulombovské bariéry. Výsledný stav budeme konstruovat jako superpozici tenkých kulových slupek.



Na kulovou slupku ve vzdálenosti r od středu O , tloušťky dr a náboje $dQ(r)$ působí elektrostatická síla F_e vytvářená interakcí náboje kulové slupky a náboje koule o poloměru r s velikostí $Q(r)$.

V celém objemu koule budeme předpokládat konstantní hustotu náboje ρ . Mějme kulovou slupku ve vzdálenosti r od středu koule s limitně tenkou tloušťkou dr . Její objem je $4\pi r^2 dr$. Náboj dQ této slupky lze získat pomocí tohoto objemu a hustoty elektrického náboje ρ :

$$dQ = \rho \cdot 4\pi r^2 dr.$$

Na slupku působí pouze náboj $Q(r)$, který je uvnitř koule s poloměrem r ohraničené slupkou. Podle vztahu (27) tak na ni působí síla F_e o velikosti (Q_1 je nyní $Q(r)$ a Q_2 pak dQ):

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(r) \cdot dQ}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(r) \cdot \rho \cdot 4\pi r^2 dr}{x^2}.$$

Realizovaná velikost práce při přesunu silou F po dráze dx ve směru působení síly je:

$$dE_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(r) \cdot \rho \cdot 4\pi r^2 dr}{x^2} dx.$$

Stejně jako v případě určování coulombovské bariéry je pro její přepravení z nekonečna na vzdálenost r od středu koule třeba vykonat práci a zároveň je třeba tuto práci vykonat pro všechny vrstvičky dr od $r = 0$ (střed koule) až po $r = R$ (poloměr koule):

$$|E_e| = E_{pe} = W = \left| \int_{\infty}^r \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(r) \cdot \rho \cdot 4\pi r^2 dr}{x^2} dx \right|,$$

kde W je vykonaná práce, E_{pe} elektrostatická polohová energie a E_e energie elektrostatické vazby.

$$|E_e| = \left| \left[\int_0^R \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(r) \cdot \rho \cdot 4\pi r^2}{x} dr \right]_{\infty}^r \right| = \left| \int_0^R \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} Q(r) \cdot \rho \cdot 4\pi r dr \right|.$$

Dosadíme za náboj $Q(r)$, který dostaneme z objemu a hustoty náboje:

$$Q(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho,$$

$$\begin{aligned} |E_e| &= \left| \int_0^R \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho \cdot \rho \cdot 4\pi r dr \right| = \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4^2}{3} \pi^2 r^4 \cdot \rho^2 dr = \\ &= \left[\frac{1}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4^2}{3} \pi^2 r^5 \cdot \rho^2 \right]_0^R = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4^2}{3^2} \pi^2 R^5 \cdot \rho^2. \end{aligned}$$

Upravíme s využitím vztahu mezi celkovým nábojem koule Q a jejím objemem a hustotou ρ :

$$|E_e| = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \rho \right)^2 \frac{1}{R} = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}. \quad (31)$$

Dosadíme za poloměr R i náboj jádra Q a využijeme konstanty jemné struktury α :

$$|E_e| = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2 Z^2 \hbar c}{\hbar c R} = \frac{3}{5} \alpha \frac{Z^2 \hbar c}{R} = \frac{3}{5} \alpha \frac{Z^2 \hbar c}{r_0 \sqrt[3]{A_{Bi}}}.$$

Stejné náboje se odpuzují. Práci tak musíme vykonat, abychom vázaný systém dostali, takže energie elektrostatické vazby E_e je v daném případě na rozdíl od polohové elektrické energie E_{pe} záporná:

$$E_e = -E_{pe} = -\frac{3}{5} \alpha \frac{Z^2 \hbar c}{r_0 \sqrt[3]{A_{Bi}}}. \quad (32)$$

Číselně:

$$E_e(^{209}\text{Bi}) = -\frac{3}{5} \frac{1}{137,036} \frac{83^2 \cdot 197,3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{1,3 \text{ fm} \cdot \sqrt[3]{209}} = -771,391 \text{ MeV} \approx -771 \text{ MeV}.$$

Vzhledem k omezené přesnosti určení poloměru jádra je i přesnost určení energie elektrostatické vazby omezená.

Hmotnost jádra je hmotnost atomu mínus hmotnosti elektronů, vyjádříme ji vztahem (24).

Číselně:

$$\begin{aligned} m_j &= 208,980\,399 \cdot 931,494\,095 \frac{\text{MeV}}{c^2} - 83 \cdot 0,510\,999 \frac{\text{MeV}}{c^2} = \\ &= 194\,621,595 \frac{\text{MeV}}{c^2}. \end{aligned}$$

Vazebná energie E_j je rozdíl mezi celkovou hmotností všech protonů a neutronů a hmotností jádra vynásobenou kvadrátem rychlosti světla a vyjádříme ji vztahem (25).

Číselně:

$$\begin{aligned} E_j &= [83 \cdot 938,272\,081 \text{ MeV} + (209 - 83) \cdot 939,565\,413 \text{ MeV}] \\ &\quad - 194\,621,595 \text{ MeV} = 1\,640,230 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Vazebná energie ϵ_j na jeden nukleon je:

$$\epsilon_j = \frac{1\,640,230 \text{ MeV}}{209} = 7,848 \text{ MeV}.$$

Odpudivá síla stejných nábojů protonů snižuje celkovou vazebnou energii, energie elektrostatické vazby je záporná. Celková vazebná energie E_j je dána součtem energie silné jaderné interakce E_S a energie elektrostatické vazby E_e . Energii silné jaderné interakce tak dostaneme jako rozdíl celkové vazebné energie a energie elektrostatické vazby:

$$E_S = E_j - E_e. \quad (33)$$

Číselně (připomeňme, že energie elektrostatické vazby je záporná a v reálu se velikosti celkové vazebné energie a energie elektrostatické vazby sčítají):

$$E_S = 1\,640,230 \text{ MeV} - (-771,391 \text{ MeV}) = 2\,411,621 \text{ MeV} \approx 2\,412 \text{ MeV}.$$

Vzhledem k přesnosti určení poloměru jádra a tím i hodnoty energie elektrostatické vazby je přesnost hodnoty energie silné jaderné interakce omezená.

Poloměr jádra bismutu 209 je 7,7 fm, jeho energie elektrostatické vazby je -771 MeV. Celková vazebná energie je 1 640,230 MeV a energie silné jaderné síly je 2 412 MeV. Coulombovská bariéra mezi ^{70}Zn a ^{209}Bi je 274 MeV.

2.3 Urychlování a pohyby iontů v elektrickém a magnetickém poli

Pohyb nabitě částice ve statickém elektrickém a magnetickém poli je dán Lorentzovým vztahem:

$$\mathbf{F}_L = Q \cdot \mathbf{E} + Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (34)$$

kde Q je náboj, v je rychlost nabitě částice, E intenzita elektrického pole a B je magnetická indukce.

V případě elektrostatického pole působí síla na kladný iont ve směru intenzity elektrického pole a je přímo úměrná velikosti náboje a intenzity elektrického pole. U statického magnetického pole vystupuje ve vzorci vektorový součin vektorů rychlosti a magnetické indukce. Magnetické pole tak působí na pohybující se nabitou částici jen tehdy, když jeho rychlost a magnetická indukce nejsou rovnoběžné. Pokud jsou vektor rychlosti a vektor magnetické indukce navzájem kolmé, je Lorentzova magnetická síla kolmá na oba tyto vektory a její velikost F_m je dána součinem velikostí náboje, rychlosti a magnetické indukce:

$$F_m = Q \cdot v \cdot B. \quad (35)$$

Lineární elektrostatický urychlovač

U tohoto zařízení jsou nabité částice nebo ionty urychlovány přibližně po přímce ve vakuové trubici (tlak 10^{-2} Pa až 10^{-3} Pa zajistí, že střední volná dráha urychlované částice je několik metrů). K postupnému urychlení slouží vysoké napětí U , které se vytváří pomocí vysokonapěťového elektrostatického generátoru. To je prostřednictvím napěťového děliče rozloženo mezi soustavu elektrod. Při průletu mezi dvěma elektrodami získá iont kinetickou energii

$$\Delta E_k = Q \frac{U}{N}$$

kde Q je náboj iontu, U je napětí generátoru a N je počet urychlovacích elektrod. Rozložení napětí mezi více elektrod přispívá k fokusaci (zaostření) svazku. Po průletu všemi elektrodami získá iont celkovou kinetickou energii E_k :

$$E_k = N \cdot \Delta E_k = QU \quad (36)$$

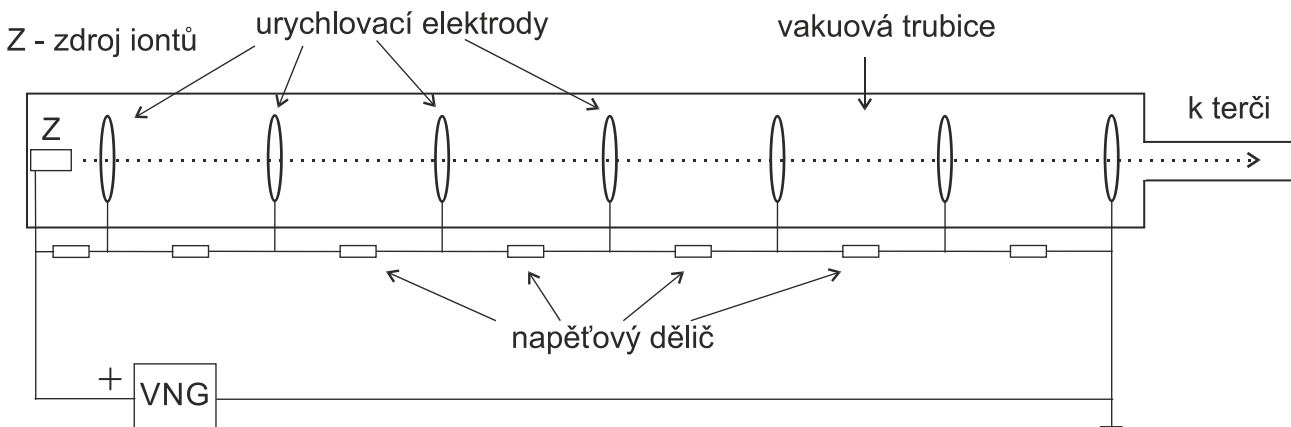


Schéma lineárního elektrostatického urychlovače

Zdrojem vysokého napětí může být například Van de Graaffův generátor. V něm získává vysoké napětí elektroda kulového tvaru, na kterou se přenáší náboj získaný z externího zdroje nebo třením o kartáč pohyblivým izolačním pásem. Z něho se náboj odvádí na povrch zmíněné koule a hromadí se tam. Takový urychlovač (HV2500) provozuje např. Ústav technické a experimentální fyziky ČVUT v Praze v Holešovičkách. Podle nastaveného napětí poskytuje urychlovač HV2500 lehké ionty o maximální energii 2,5 MeV. Může pracovat s proudem do 10 mA. Podobný urychlovač pracoval i v Ústavu jaderné fyziky AV ČR, ten je nyní vystaven v Národním technickém muzeu. Další možností je Cockcroft-Waltonův kaskádní generátor, který využívá elektrický obvod označovaný jako napěťový násobič. Tento

typ generátoru měl první (1951) československý urychlovač Ústavu pro atomovou fyziku ČAVU, který byl umístěn ve filmových ateliérech v budově bývalého Fragnerova parního mlýna v Hostivaři. Dosažené napětí 800 kV, max protonový proud do 100 μA .

Většinou se urychlují kladné ionty, neboť atomy lze relativně snadno zbavit elektronů. Zdroj vysokého napětí je ale vtipným uspořádáním možné využít dvakrát. Ve zdroji vytvoříme atomy, které mají o jeden elektron více, a urychlujeme tyto záporné ionty. Na obou koncích urychlovače je v tomto případě zemní potenciál a maximální kladné napětí je v jeho středu. Zde se pak záporně nabitý iont průchodem velmi tenkou fólií nebo proudem plynu zbaví dvou nebo více elektronů a stane se kladným, který je od kladné elektrody odpuzován. Celkové napětí tak lze využít dvakrát. Právě takový typ, holandský Tandetron 4130MC, nahradil v Ústavu jaderné fyziky AV ČR zmiňovaný Van de Graaffův urychlovač.

Lineární vysokofrekvenční urychlovač

Jde o lineární urychlovač, který je založen na postupném urychlování nabitě částice (iontů, ale i elektronů) střídavým napětím vysoké frekvence. Částice prolétá elektrodami ve tvaru dutých válců a je urychlována při průletu mezi každými dvěma sousedními válci. Nabitá částice vyletuje ze zdroje částic do první elektrody. Válcovou elektrodou prolétá stálou rychlostí, a když z ní vystupuje, je třeba, aby vždy byla na elektrodách správná polarita napětí. Ten válec, ze kterého částice vyletuje, ji musí odpuzovat a následující přitahovat. Při průletu mezi dvěma válci je tak částice urychlena a zvýší kinetickou energii o

$$\Delta E_k = QU, \quad (37)$$

kde Q je náboj částice a U je napětí mezi elektrodami. Aby frekvence urychlujícího napětí mohla zůstat konstantní, musí se délky elektrod zvětšovat, neboť rychlost částice roste. Po průletu všemi elektrodami získá iont celkovou kinetickou energii

$$(N - 1)QU,$$

kde N je počet elektrod. Pokud kinetická energie není zanedbatelná vzhledem k energii klidové, musí se při návrhu geometrie elektrod použít relativistický vztah pro zvětšení hmotnosti částice.

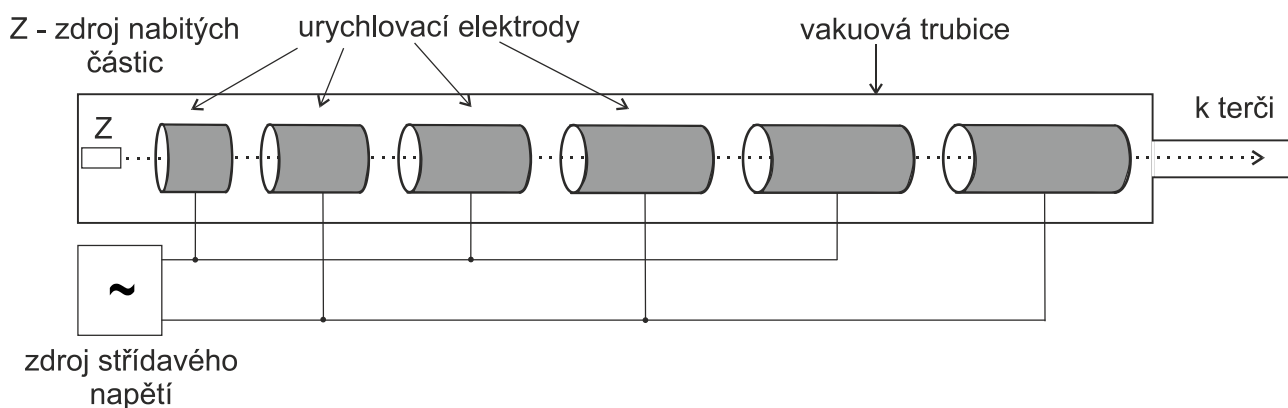


Schéma lineárního vysokofrekvenčního urychlovače

Příklad 9: Lineární elektrostatický urychlovač předurychluje ionty ${}_{20}^{48}\text{Ca}$ ($A_r = 47,952\,523$) na kinetickou energii na jeden nukleon $\varepsilon_k = E_k/A = 1,5\text{ MeV}/A$ (tato veličina se pro popis energie svazku často využívá, někdy se stejná použitá jednotka označuje jako MeV/nukleon nebo MeV/ u). Délka jeho urychlovací trubice je 15 m. Jaké je jeho potřebné celkové napětí při úplné ionizaci a jakou energii získáme tímto napětím v případě desetkrát ionizovaného iontu? Jaká je intenzita elektrostatického pole? Jak dlouho trvá urychlování a jaká je rychlost iontu?

Hmotnost jádra je (vztah (24)):

$$m_j = 47,952\,523 \cdot 931,494\,095 \frac{\text{MeV}}{c^2} - 20 \cdot 0,510\,999 \frac{\text{MeV}}{c^2} = 44\,657,272 \frac{\text{MeV}}{c^2}.$$

Máme zadanou kinetickou energii na jeden nukleon ε_k . Celková získaná kinetická energie je rovna:

$$E_k = A \cdot \varepsilon_k = A \cdot \left(\frac{E_k}{A}\right). \quad (38)$$

Číselně:

$$E_k = 48 \cdot 1,5\text{ MeV} = 72\text{ MeV}.$$

Připomeňme, že v elektrostatickém urychlovači je větší počet elektrod, ale ze vztahu (36) je jasné, že podstatné je celkové napětí U mezi počátečním bodem a poslední elektrodou. Celková kinetická energie získaná při urychlování elektrostatickým polem pro napětí U je:

$$E_k = Q \cdot U \Rightarrow U = \frac{E_k}{Q}.$$

Číselně (využijeme, že jednotka elektronvolt je definována pomocí náboje elektronu a napětí jednoho voltu):

$$U = \frac{72 \text{ MeV}}{20e} = 3,6 \text{ MV.}$$

Číselně kinetická energie pro toto napětí a desetkrát ionizovaný iont:

$$E_K = 10e \cdot 3,6 \text{ MV} = 36 \text{ MeV.}$$

Intenzita elektrostatického pole je:

$$E = \frac{U}{l}. \quad (39)$$

Číselně:

$$E = \frac{3,6 \text{ MV}}{15 \text{ m}} = 0,24 \frac{\text{MV}}{\text{m}}.$$

Rychlost v daném případě můžeme určovat v nerelativistickém přiblížení (kinetická energie 72 MeV je téměř o tři řády nižší než klidová energie iontu, která je téměř 45 GeV). Využijeme tak rovnici (10):

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2E_k}{E_0}}.$$

Číselně:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2 \cdot 72 \text{ MeV}}{44\,657,272 \text{ MeV}}} = 0,056\,79.$$

Dobu urychlování dostaneme ze vztahu pro rovnoměrný zrychlený pohyb:

$$t = \frac{2s}{v} \quad (40)$$

Číselně:

$$t = \frac{2 \cdot 15 \text{ m}}{0,056\,79 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 1,76 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 1,76 \mu\text{s}.$$

Potřebné napětí je u lineárního elektrostatického urychlovače 3,6 MV a desetkrát ionizovaný iont uhlíku bude urychlen na kinetickou energii 36 MeV. Intenzita elektrického pole je 0,24 MV/m. Konečná rychlost plně ionizovaného iontu je 0,05679c a doba jeho urychlování je 1,76 μs.

Cyklotron

Jak je ukázáno na následujícím obrázku, základem tohoto zařízení jsou dvě komory zvané duanty (pólové nástavce ve tvaru dutých půlválců) oddělené urychlovací mezerou. Duanty jsou jako dvě elektrody připojené ke zdroji střídavého napětí vysoké frekvence (zpravidla MHz) a vysokého napětí (10^4 V až 10^5 V). Duanty jsou umístěny mezi dvěma póly velkého magnetu, který vytváří silné magnetické pole (magnetická indukce až 2 T). Pomocí něho jsou nabitě částice udržovány na kruhové trajektorii. Periodicky se tak dostávají do elektrického urychlovacího systému, který zvětšuje jejich rychlost a tím i poloměr jejich trajektorie v magnetickém poli. Částice se tak pohybují po zakřivené trajektorii (přibližně spirále). V celé urychlovací komoře je vysoké vakuum (10^{-4} Pa až 10^{-5} Pa). Ionty vystupují ze zdroje iontů a jsou v mezeře poprvé urychleny směrem k duantu, na němž je právě napětí, jež má opačnou polaritu, než je náboj iontu. Uvnitř duantu se již iont pohybuje stálou rychlostí po půlkružnici o poloměru r .

Poloměr kruhové trajektorie iontu určíme z rovnosti velikostí dostředivé F_d a magnetické F_m síly

$$F_d = F_m.$$

Velikost magnetické síly je dána vztahem (35), pak dostáváme:

$$\frac{mv^2}{r} = BQv, \quad (41)$$

$$r = \frac{mv}{BQ} = \frac{p}{BQ}, \quad (42)$$

kde m je hmotnost iontu, v je rychlost iontu, B je magnetická indukce, Q je náboj iontu, p je hybnost iontu.

Po opsání půlkružnice vstupuje iont znovu do urychlovací mezery a v tu chvíli musí být polarita napětí na duantech taková, aby došlo znovu k jeho urychlení. Kinetická energie iontu vzroste o hodnotu danou vztahem (37):

$$\Delta E_k = QU.$$

Iont znovu opíše půlkružnici, ale větší rychlostí, proto s větším poloměrem. Tak postupně dochází k urychlování iontu po trajektorii podobné spirále. Až se iont dostane na požadovaný poloměr, dojde k jeho vyvedení za pomoci elektrického pole deflektoru.

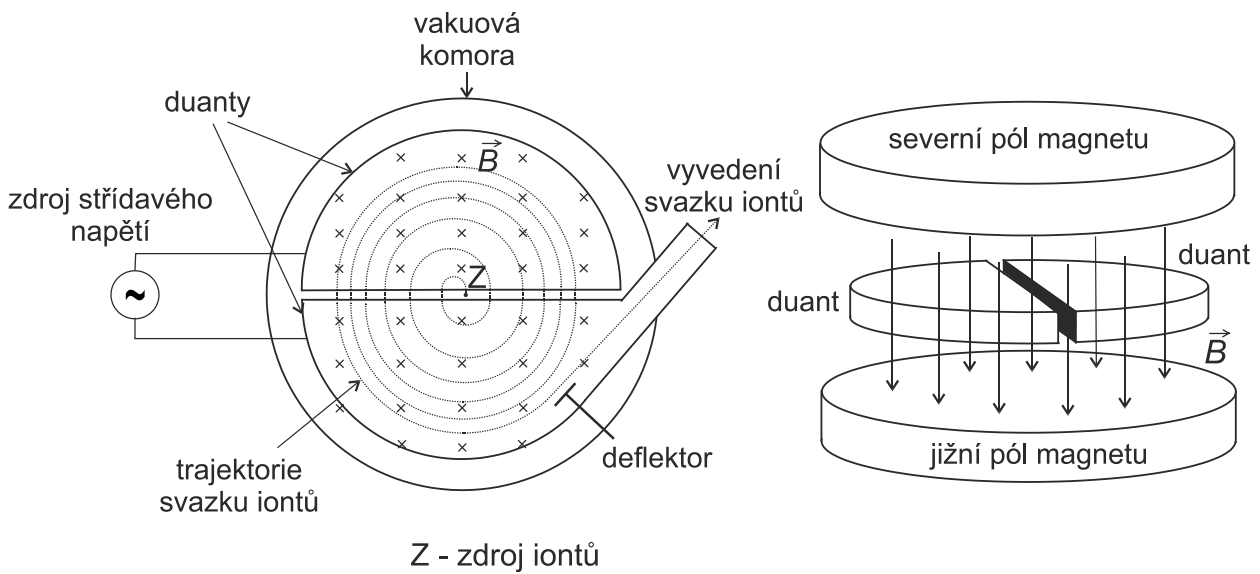


Schéma cyklotronu.

K tomu, aby docházelo k urychlování, musí být splněna rezonanční podmínka $f_c = f_g$, to je, aby cyklotronová frekvence oběhu nabité částice f_c byla rovna frekvenci zdroje střídavého napětí (generátoru) f_g . Pokud je kinetická energie iontu mnohonásobně menší než jeho energie klidová, můžeme použít nerelativistické řešení. To je právě případ cyklotronu, který je nerelativistickým rezonančním kruhovým urychlovačem protonů a těžších iontů. Ze vztahu (42) pak vychází, že cyklotronová frekvence je v případě konstantní magnetické indukce i náboje a hmotnosti urychlované částice konstantní.

$$r = \frac{mv}{QB} = \frac{m(2\pi r f_c)}{QB} \Rightarrow f_c = \frac{QB}{2\pi \cdot m}. \quad (43)$$

V případě, že je kinetická energie iontů velká a jejich rychlost blízká rychlosti světla, nelze zanedbat nárůst relativistické hmotnosti

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (44)$$

a frekvence obíhání iontů se při urychlování snižuje. Aby urychlení na tak velké energie bylo možné, používají se dvě řešení.

1. Zachová se magnetické pole a v průběhu urychlování se zmenšuje frekvence urychlovacího napětí (synchrociklotron). Možný je pouze pulzní provoz a tudíž slabá intenzita svazku.
2. Zachová se frekvence a zvýší se hodnoty magnetické indukce směrem k okraji duantů (izochronní ciklotron). Možný je kontinuální provoz s velkou intenzitou svazku.

Průměr komory izochronního ciklotronu může být např. 120 cm (U-120M v ÚJF AV ČR v Řeži) nebo 400 cm (U-400M v SÚJV Dubna, Rusko) nebo až 15 m (Ring ciklotron v PSI, Švýcarsko). Zatímco ciklotrony umožňují urychlit protony na energii řádově 10 MeV, izochronní ciklotrony dosahují energie až 590 MeV. Izochronní ciklotron U-400M pracující v laboratoři pro produkci supertěžkých prvků v SÚJV Dubna dokáže urychlit např. ionty ${}_{16}^{36}\text{S}^{10+}$ na energii 1188 MeV, což odpovídá rychlosti 0,259 c a hmotnost iontů stoupne o 3,5 %.

Je namístě ještě zmínit, že dnešní ciklotrony jsou značně různorodé - složitější magnetické pole, sektorové ciklotrony s dělenými magnety, supravodivé ciklotrony s magnetickým polem třeba 6 T.

Příklad 10: Ciklotron urychluje úplně ionizované ionty hélia až na energii 27 MeV. Jaké musí být jeho magnetické pole, jestliže se svazek vyvádí na poloměru 0,8 m. Jaká je frekvence tohoto urychlovače?

Můžeme využít nerelativistické přiblížení (kinetická energie je maximálně pouze 0,7 % klidové):

$$\frac{E - E_0}{E_0} = \frac{E_k}{E_0} = \frac{27 \text{ MeV}}{3\,727,379 \text{ MeV}} = 0,007\,2 = 0,72 \text{ \%}.$$

Využijeme již zmíněný vztah (41) mezi magnetickou silou a silou dostředivou a získáme vztah mezi hybností a magnetickou indukcí. Ten je obecně relativistický, ale nyní stačí hybnost vyjádřená nerelativistickým vztahem (12):

$$m \frac{v^2}{R} = QBv \Rightarrow B = \frac{pc}{QRc} = \frac{\sqrt{2E_0E_k}}{QRc}. \quad (45)$$

Číselně (využijeme zase definice jednotky elektronvolt):

$$B = \frac{\sqrt{2 \cdot 3\,727,379 \text{ MeV} \cdot 27 \text{ MeV}} \cdot 10^6 \text{ eV}}{2e \cdot 0,8 \text{ m} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3\,727,379 \cdot 27} \cdot 10^6 \text{ eV}}{2e \cdot 0,8 \text{ m} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 0,935 \text{ T}.$$

Určíme frekvenci urychlovače f (využijeme nerelativistický vztah (10) mezi rychlostí a kinetickou energií):

$$f = \frac{v}{2\pi R} = \frac{c \sqrt{\frac{2E_k}{E_0}}}{2\pi R}. \quad (46)$$

Číselně:

$$f = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \sqrt{\frac{2 \cdot 27 \text{ MeV}}{3 \cdot 727,379 \text{ MeV}}}}{2 \cdot \pi \cdot 0,8 \text{ m}} = 7,18 \cdot 10^6 \text{ Hz} = 7,18 \text{ MHz}.$$

Magnetická indukce tohoto urychlovače je 0,935 T a frekvence urychlování pak 7,18 MHz.

Magnetický hmotnostní spektrometr

Jde o přístroj, který umožňuje separovat izotopy a určit jejich hmotnosti. Kladné ionty o stejném náboji Q vystupují ze zdroje iontů a vstupují různými rychlostmi do filtru rychlostí. Tím je deskový kondenzátor se zkříženým magnetickým polem (magnetická indukce \mathbf{B} je nakreslena křížky a míří do nákresny) a elektrickým polem (intenzita elektrického pole \mathbf{E} je nakreslena šipkami v rovině nákresny). Ionty se stejnou ionizací (nábojem) vstupují do filtru různě velkými rychlostmi, ale kolmými na \mathbf{B} i \mathbf{E} . Proto elektrická síla míří dolů ve směru \mathbf{E} a magnetická síla míří vzhůru, opačným směrem.

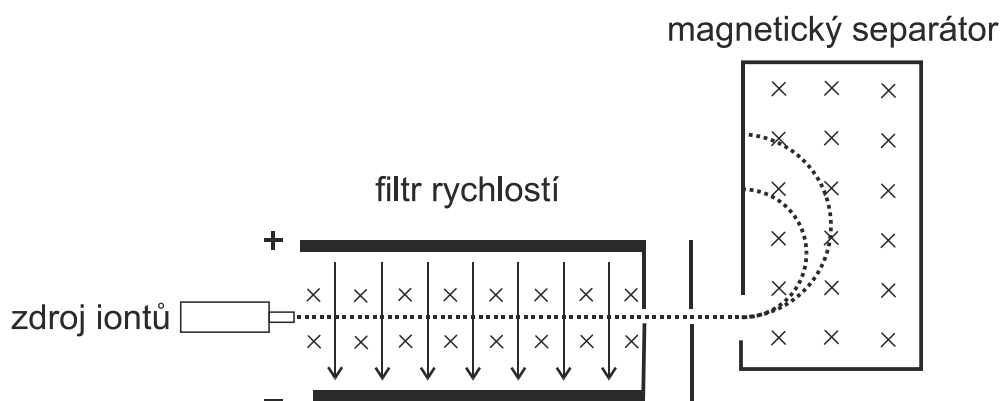


Schéma magnetického hmotnostního spektrometru. Jeho součástí je zdroj iontů, kde se produkují ionty o stejném náboji, rychlostní filtr vybere ionty o stejné rychlosti a magnetický separátor je pak rozdělí podle jejich hmotnosti.

Jestliže nastavíme hodnoty E a B tak, aby síly byly stejné, bude platit

$$F_e = F_m,$$

$$QE = BQv,$$

$$v = \frac{E}{B}. \quad (47)$$

Rychlost všech iontů, které vystupují otvorem z rychlostního filtru, bude tedy stejná, a nezávislá na hmotnosti iontu. Po vstupu iontů do magnetického separátoru působí na ionty pouze magnetická síla, která zakříví jejich trajektorie v závislosti na hmotnosti. Tak se dají separovat izotopy. Různé izotopy se pohybují po kružnicích o různých poloměrech r . Z rovnosti dostředivé a magnetické síly (vztah (41)) určíme jejich hmotnost

$$m = \frac{BQr}{v}. \quad (48)$$

Důležitým parametrem, který charakterizuje pohyb iontu v magnetickém spektrometru je součin magnetické indukce a poloměru Br , který se označuje jako magnetická rigidita.

Poznámka: Zde popsaný hmotnostní spektrometr patří k nejjednodušším a nejstarším. Dnešní hmotnostní spektrometry umožňují přesnější identifikaci iontů na základě jejich separace složitějším magnetickým polem – kvadrupólové analyzátory.

Příklad 11: Magnetický hmotnostní spektrometr je určený pro separaci různých izotopů uhlíku. Nejdříve je uhlík jednou ionizován a pak jsou jeho ionty urychleny. Určete elektrické pole pro filtr rychlostí spektrometru, který využívá jak pro filtr rychlostí, tak pro separaci různých izotopů uhlíku magnetické pole 0,045 T. Jaká musí být rychlost iontů, aby byl poloměr trajektorie iontů uhlíku ^{12}C ($A_r = 12,000\,000\,0$) 0,300 m. Jaký bude poloměr trajektorie pro izotopy ^{13}C ($A_r = 13,003\,354\,84$) a ^{14}C ($A_r = 14,003\,241\,99$)?

Hmotnosti jednou ionizovaných iontů izotopů uhlíku:

$$m(^{12}\text{C}) = 12,000\,0 \cdot 931,494\,095 \frac{\text{MeV}}{c^2} - 1 \cdot 0,510\,999 \frac{\text{MeV}}{c^2} = 11\,177,418 \frac{\text{MeV}}{c^2},$$

$$m(^{13}\text{C}) = 13,003\,354\,84 \cdot 931,494\,095 \frac{\text{MeV}}{c^2} - 1 \cdot 0,510\,999 \frac{\text{MeV}}{c^2} =$$

$$= 12\,112,037 \frac{\text{MeV}}{c^2}.$$

$$m(^{14}\text{C}) = 14,003\,241\,99 \cdot 931,494\,095 \frac{\text{MeV}}{c^2} - 1 \cdot 0,510\,999 \frac{\text{MeV}}{c^2} =$$

$$= 13\,043,426 \frac{\text{MeV}}{c^2}.$$

Jde o poměrně malou hodnotu magnetické indukce a poloměru, mohlo by tak jít o nerelativistický případ. Rychlost potřebnou pro daný poloměr tak dostaneme ze vztahu:

$$m \frac{v^2}{R} = QBv \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{QBRc}{mc^2} = \frac{QBRc}{E_0} \quad (49)$$

Číselně (za elementární náboj nedosazujeme, protože energii máme v elektronvoltech a ne v SI jednotkách):

$$\frac{v}{c} = \frac{1 e \cdot 0,045 \text{ T} \cdot 0,3 \text{ m} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{11\,177,418 \text{ MeV}} = \frac{1 e \cdot 0,045 \text{ T} \cdot 0,3 \text{ m} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{11\,177,418 \cdot 10^6 \text{ eV}} = 3,62 \cdot 10^{-4}.$$

Rychlost je tak opravdu nerelativistická. V případě rychlostního filtru působí síly elektrostatického pole a magnetického pole opačným směrem a jejich velikost musí být pro zvolenou rychlost stejná. V tom případě nezmění směr pohybu částice. Při jiných rychlostech se odkloní na jednu či druhou stranu a neprojdou kolimátorem. Pro správnou rychlost musí platit:

$$QE = QBv \Rightarrow E = B \cdot \left(\frac{v}{c}\right) \cdot c. \quad (50)$$

Číselně:

$$E = 0,045 \text{ T} \cdot 0,000\,362 \cdot 3 \cdot \frac{10^8 \text{ m}}{\text{s}} = 4887 \frac{\text{V}}{\text{m}} \approx 4900 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Poměr mezi poloměry v magnetickém poli pro další izotopy a poloměr trajektorie iontu izotopu uhlíku dostaneme z podmínky, že rychlost pro všechny izotopy je za rychlostním filtrem stejná (využijeme značení, kde příslušný izotop je v závorce za veličinou):

$$\left(\frac{v}{c}\right)({}^x\text{C}) = \left(\frac{v}{c}\right)({}^{12}\text{C}) \Rightarrow \frac{QBR({}^x\text{C})c}{E_0({}^x\text{C})} = \frac{QBR({}^{12}\text{C})c}{E_0({}^{12}\text{C})} \Rightarrow \frac{R({}^x\text{C})}{R({}^{12}\text{C})} = \frac{E_0({}^x\text{C})}{E_0({}^{12}\text{C})}.$$

$$\text{Číselně pro iont } {}^{13}\text{C}: \quad \frac{R({}^{13}\text{C})}{R({}^{12}\text{C})} = \frac{12\,112,036}{11\,177,417} = 1,083\,6 \Rightarrow R({}^{13}\text{C}) = 32,5 \text{ cm}.$$

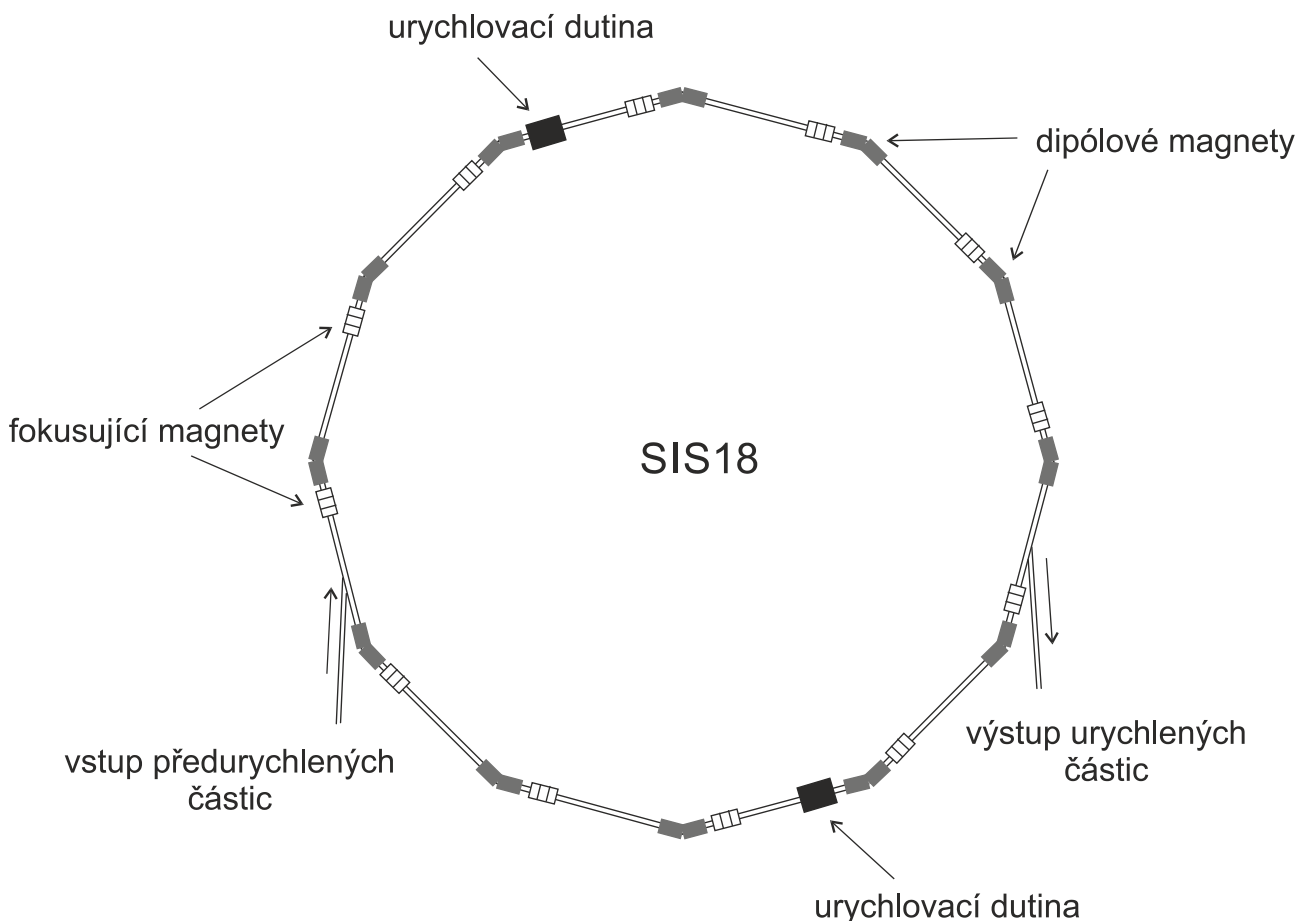
$${}^{14}\text{C}: \quad \frac{R({}^{14}\text{C})}{R({}^{12}\text{C})} = \frac{13\,043,425}{11\,177,417} = 1,166\,9 \Rightarrow R({}^{14}\text{C}) = 35,0 \text{ cm}.$$

Rychlost musí být u daného urychlovačového hmotnostního spektrometru $0,000\,362c$, což je 108 km/s a intenzita elektrostatického pole použitého u rychlostního filtru 4 900 V/m. Poloměry trajektorie u izotopu ${}^{13}\text{C}$ a ${}^{14}\text{C}$ budou o 2,5 cm a 5,0 cm větší než

u izotopu ^{12}C . Takové hmotnostní spektrometry, i když daleko sofistikovanější konstrukce, umožňují určovat i extrémně malé množství ^{14}C a posunují tak možnosti datování pomocí tohoto radioaktivního izotopu na další desítky tisíc let do minulosti, třeba až do doby neandrtálců a jeskynních medvědů.

Synchrotron

Jde o kruhový urychlovač, který umožňuje urychlování nabitých částic a iontů na relativistické rychlosti a energie. Urychlování probíhá ve vakuované trubici, která má přibližně tvar kružnice. Aby poloměr trajektorie zůstal stejný, musí se s průběhem urychlování zvyšovat hodnota magnetické indukce vytvářené dipólovými magnety rozmístěnými po obvodu urychlovače. Tyto magnety zakřívují trajektorii urychlovaných částic.



Na obrázku je jako příklad schéma synchrotronu SIS18 v GSI Darmstadt.

Stejně nabité částice se odpuzují. Aby se při urychlování svazek nerozšiřoval, musí se fokusovat speciálním magnetickým polem. To vytváří sestavy kvadrupólových a hexapólových magnetů. Urychlování probíhá pomocí vysokofrekvenčních dutinových rezonátorů. S rostoucí rychlostí a hmotností se však musí měnit i frekvence urychlovacího napětí. Odlišná situace může být u elektronových synchrotronů. Elektrony jsou lehké a velice brzy mají rychlost zanedbatelně odlišnou od rychlosti světla. Takovou už mohou získat při předurychlení a v synchrotronu se tak jejich rychlost i frekvence oběhu při dalším urychlování mění zanedbatelně, roste pouze jejich energie.

Synchrotrony jsou těmi největšími urychlovači, obvod o urychlovače LHC (Large Hadron Collider) v laboratoři CERN je 27 km. Velikost magnetické indukce lze měnit pouze v určitém rozsahu, buď v oblasti nižších hodnot, nebo vyšších. Pro získání těch nejvyšších energií je tak potřeba mít sestavu (kaskádu) více urychlovačů. V laboratoři CERN tak pouť částice začíná v lineárním elektrostatickém urychlovači, potom projde lineárním vysokofrekvenčním urychlovačem a pak postupně několika synchrotrony. Teprve na konci je urychlovač LHC.

Příklad 12: Při studiu hmotností jader se zkoumaná jádra získávala tříštěním urychlených jader na jádrech v terči. Používaná jádra bismutu 209 ($A_r = 208,980\ 398\ 5$) se urychlovala na relativistickém urychlovači synchrotronu SIS18 v GSI Darmstadt na energii 930 MeV/A. Urychlování začíná u energií téměř 15 MeV/A, to je energie, kterou si ionty přinesly z lineárního urychlovače UNILAC. Aby se mohla relativistická částice pohybovat po trajektorii o konstantním poloměru a frekvence urychlovacího systému odpovídala frekvenci oběhu iontů, musí se v průběhu urychlování měnit magnetická indukce i frekvence urychlování. Obvod urychlovače je $o_1 = 216$ m. Určete, v jakém rozsahu se bude měnit urychlovací frekvence a magnetická indukce (předpokládáme, že jsou magnety rovnoměrně po celém obvodu, což neodpovídá realitě). V každém oběhu je celkové urychlovací napětí poskytované dvěma vysokofrekvenčními dutinovými rezonátory 20 kV. Kolik oběhů při urychlování ionty bismutu absolvují?

Urychlené ionty bismutu jsou směřovány na beryliový terč. Zde se fragmentují a pomocí speciálního zařízení (separátoru fragmentů) se vyberou požadované ionty. S využitím vhodné kombinace magnetických a elektrických polí se vybírají ionty se stejnou hodnotou magnetické rigidity Br a tím i stejnou hodnotou hybnosti. Ty se posílají do shromažďovacího prstence ESR o obvodu $o_2 = 108$ m, což je takový synchrotron bez urychlovacích prvků. V daném konkrétním případě se zkoumala jádra izotopů zlata. Jaká je energie izomerního excitovaného stavu (jde o vybuzený stav

s dlouhou dobou života), jestliže byl rozdíl frekvencí jader v základním a excitovaném stavu $\Delta f = 4,43$ Hz, pokud je hmotnost jádra ^{198}Au v základním stavu $A_r = 197,968\,244$? Vybraná hybnost svazku $pc = 880$ MeV/A.

Poznámka: Z jader bizmutu na beryliovém terči vznikají mimo jiné jádra zlata (odvěký sen alchymistů). Tato jádra mohou být i v excitovaném izomerním stavu, ze kterého po poměrně dlouhé době přejdou do základního stavu. Energie a tedy také hmotnost v excitovaném stavu je větší než v základním stavu, což se projeví na frekvenci obíhání ve shromažďovacím prstenci. Z rozdílu frekvencí lze vypočítat energii excitovaného stavu.

Pro jádro bizmutu ^{209}Bi máme $Z = 83$ a $A = 209$, jeho klidová energie je:

$$E_0(^{209}\text{Bi}) = 208,980\,398\,5 \cdot 931,494\,095 \text{ MeV} - 83 \cdot 0,510\,999 \text{ MeV} = \\ = 194\,621,594 \text{ MeV}.$$

Celková kinetická energie je na začátku urychlování:

$$E_{k1} = 209 \cdot 15 \text{ MeV} = 3\,135 \text{ MeV}.$$

Na konci urychlování pak:

$$E_{k2} = 209 \cdot 930 \text{ MeV} = 194\,370 \text{ MeV}.$$

Při výpočtu změny magnetické indukce vyjdeme ze vztahu (45) pro její závislost na hybnosti. Veličinu pc vyjádříme s využitím relativistického vztahu pomocí kinetické energie E_k , poloměr R pomocí obvodu o a náboj iontu Q :

$$B = \frac{pc}{QRc} = \frac{\sqrt{2E_k E_0 + E_k^2}}{Ze \frac{o_1}{2\pi} c}. \quad (51)$$

Číselně:

$$B_{MIN} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3\,135 \cdot 194\,621,594 + 3\,135^2} \text{ MeV}}{83 \cdot e \frac{216}{2\pi} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 0,041\,0 \text{ T}.$$

$$B_{MAX} = \frac{\sqrt{2 \cdot 194\,370 \cdot 194\,621,594 + 194\,370^2} \text{ MeV}}{83 \cdot e \frac{216}{2\pi} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 0,394 \text{ T} -$$

Frekvence f je (využijeme relativistický vztah (15) mezi rychlostí v a kinetickou energií E_k):

$$f = \frac{v}{2\pi R} = \frac{c \frac{v}{c}}{2\pi R} = \frac{c \sqrt{1 - \frac{E_0^2}{(E_0 + E_k)^2}}}{2\pi \frac{o_1}{2\pi}} = \frac{c \sqrt{1 - \frac{E_0^2}{(E_0 + E_k)^2}}}{o_1}. \quad (52)$$

Číselně:

$$f_{min} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \sqrt{1 - \frac{194\,621,594^2}{(194\,621,594 + 3\,135)^2}}}{216 \text{ m}} = 0,246 \text{ MHz.}$$

$$f_{max} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \sqrt{1 - \frac{194\,621,594^2}{(194\,621,594 + 194\,370)^2}}}{216 \text{ m}} = 1,20 \text{ MHz.}$$

Při jednom oběhu získá iont přírůstek energii ΔE_k daný vztahem (37):

$$\Delta E_k = Q \cdot U.$$

Potřebný počet oběhů je pak:

$$N_f = \frac{E_{kmax} - E_{kmin}}{\Delta E_k} = \frac{E_{kmax} - E_{kmin}}{Q \cdot U}. \quad (53)$$

Číselně (využijeme definice elektronvoltage):

$$N_f = \frac{209 \cdot (930 - 15) \text{ MeV}}{83e \cdot 20\,000 \text{ V}} = 115\,200.$$

Urychlování iontů bismutu tak potrvá méně než sekundu. Po jejich dopadu na terč vzniknou i různé izotopy zlata. Podívejme se nyní na jádra izotopu zlata ^{198}Au . Ta jsou produkována v základním i izomerním excitovaném stavu a zkoumají se ve shromažďovacím prstenci. Klidová energie základního stavu je:

$$E_0 = 197,968\,244 \cdot 931,494\,095 \text{ MeV} - 79 \cdot 0,510\,999 \text{ MeV} = 184\,365,881 \text{ MeV.}$$

Celková hybnost jader zlata ve svazku je:

$$pc = A \cdot 880 \text{ MeV} = 174\,240 \text{ MeV.}$$

Rychlost svazku jader zlata ^{198}Au v základním stavu je:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Rightarrow pc = \frac{m_0 c^2 \left(\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{E_0 \left(\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$(pc)^2 = \frac{E_0^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2},$$

$$\frac{v}{c} = \frac{pc}{\sqrt{E_0^2 + (pc)^2}}. \quad (54)$$

Číselně:

$$\frac{v}{c} = \frac{174\,240 \text{ MeV}}{\sqrt{(184\,365,881 \text{ MeV})^2 + (174\,240 \text{ MeV})^2}} = 0,686\,866\,58.$$

Frekvence:

$$f = \frac{v}{2\pi R} = \frac{\frac{pc}{\sqrt{E_0^2 + (pc)^2}} c}{o_2} = \frac{pc}{o_2 \sqrt{E_0^2 + (pc)^2}} c. \quad (55)$$

Číselně (frekvenci je potřeba udávat s takovou přesností, jaká odpovídá přesnosti naměřeného rozdílu frekvencí jader v základním a excitovaném stavu, tedy na setiny hertzu):

$$f = \frac{174\,240 \text{ MeV}}{108 \text{ m} \sqrt{(184\,365,881 \text{ MeV})^2 + (174\,240 \text{ MeV})^2}} 2,997\,9 \cdot 10^8 \text{ m/s} =$$

$$= 1,906\,627\,150 \text{ MHz}.$$

Frekvence jader v excitovaném izomerním stavu (izomerní stav daného jádra je označován pomocí písmena m za nukleonovým číslem, pokud je izomerů daného nuklidu více, dává se za písmeno m číslo izomeru daného jádra) je tak:

$$f(^{198\text{m}}\text{Au}) = f(^{198}\text{Au}) + \Delta f.$$

A energie izomerního stavu je:

$$E = \sqrt{\frac{(pc)^2 c^2}{L^2(f - \Delta f)^2} - (pc)^2} - E_0 = pc \sqrt{\frac{c^2}{L^2(f - \Delta f)^2} - 1} - E_0. \quad (56)$$

Číselně:

$$E = 174\,240 \text{ MeV} \sqrt{\frac{(2,997\,9 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2}{(108 \text{ m})^2 (1\,906\,627,15 \text{ Hz} - 4,43 \text{ Hz})^2} - 1}$$

$$- 184\,365,881 \text{ MeV} = 0,812 \text{ MeV}.$$

Frekvence na synchrotronu SIS v GSI Darmstadt se musí měnit od 0,246 MHz až po 1,20 MHz. V reálném případě však lze použít i vyšší frekvence. Jen je třeba zajistit, aby při průletu dvěma vysokofrekvenčními dutinovými rezonátory byla správná fáze. Vyšší frekvence tak musí být celočíselným násobkem té požadované. Využívá se harmonické frekvence číslo 4, tedy čtyřnásobek potřebné frekvence a dutinové rezonátory tak mohou pracovat v rozmezí frekvencí od 0,8 MHz po 5,6 MHz podle potřeb daných režimem urychlování. Magnetická indukce se pak musí měnit od 0,041 T až po 0,394 T. Dipólové elektromagnety jsou na reálném urychlovači SIS18 jen ve dvanácti místech s omezenou délkou, která odpovídá urychlovači o obvodu 63 m. Jejich maximální magnetická indukce tak je až 1,8 T (viz popis synchrotronu). Při urychlování oběhne částice v urychlovači 115 200krát. Energie izomerního stavu je 812 keV.

Příklad 13: Při produkci darmstadtia 270 pomocí studené fúze se využíval svazek iontů niklu 62 ($A_r = 61,928\ 345$). Plně ionizované ionty měly energii 5,2 MeV/A a proud svazku byl 50 μA . Jaký byl počet iontů za sekundu? Jaký byl celkový výkon ukrytý ve svazku (celková kinetická energie svazku dopadajícího na terč za časovou jednotku)? Jaký tepelný výkon musí odvést chlazení olověného terče z izotopu ^{208}Pb ($A_r = 207,976\ 652$) o tloušťce 1,7 μm , jestliže ionizační ztráty v terči o dané tloušťce jsou zhruba 20 MeV? Ionizační ztráty snižují kinetickou energii částice a v terči se mění na teplo. Za jak dlouho se uvede tímto výkonem šálek vody (0,2 l) z 20 °C do varu?

Nikl má protonové číslo $Z = 28$, náboj iontu je tak $Q = Ze$. Počet částic za časovou jednotku $\frac{dN_s}{dt}$ má jednotku s^{-1} . Můžeme jej vyjádřit pomocí proudu I :

$$\frac{dN_s}{dt} = \frac{I}{Q} = \frac{I}{Ze}. \quad (57)$$

Číselně:

$$\frac{dN_s}{dt} = \frac{50 \cdot 10^{-6} \text{A}}{28 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}} = 1,1 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}.$$

Celková kinetická energie iontu je:

$$E_k = A \cdot \left(\frac{E_k}{A} \right).$$

Celkový výkon P_k skrytý v kinetické energii částic svazku tak je:

$$P_k = \frac{dN_s}{dt} \cdot A \cdot \left(\frac{E_k}{A} \right) = \frac{I}{Ze} \cdot A \cdot \left(\frac{E_k}{A} \right). \quad (58)$$

Číselně (využijeme definici elektronvoltage):

$$P_k = \frac{50 \cdot 10^{-6} \text{ A}}{28 \cdot e} \cdot 62 \cdot 5,2 \cdot 10^6 \text{ eV} = 576 \text{ W}.$$

Ionizační ztráty v terči jsou 20 MeV. Tato energie je odebrána z kinetické energie částice svazku a přemění se na teplo deponované v terči. Každá částice svazku tak v terči způsobí přírůstek tepla ΔQ . Celkový tepelný výkon P_T v terči tak je:

$$P_T = \frac{dN_s}{dt} \cdot \Delta Q = \frac{I}{Ze} \cdot \Delta Q. \quad (59)$$

Číselně:

$$P_T = \frac{50 \cdot 10^{-6} \text{ A}}{28 \cdot e} \cdot 20 \cdot 10^6 \text{ eV} = 35,7 \text{ W}.$$

Teplo Q potřebné k ohřátí daného objemu V vody je:

$$Q = c \cdot m \cdot (T_2 - T_1) = c \cdot V \cdot \rho \cdot (T_2 - T_1), \quad (60)$$

kde c je měrná tepelná kapacita vody ($c = 4180 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) a ρ je hustota vody ($\rho(20^\circ \text{C}) = 998,2 \text{ kg/m}^3$)

$$t = \frac{Q}{P_T} = \frac{c \cdot V \cdot \rho \cdot (T_2 - T_1)}{P_T}. \quad (61)$$

Číselně:

$$t = \frac{4180 \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 998,2 \text{ kg/m}^3 \cdot 80 \text{ K}}{35,7 \text{ W}} = 1869 \text{ s} \doteq 31 \text{ min}.$$

Pokud by se přeměnila na teplo celá kinetická energie částic a ohřívala by zmíněných 0,2 l vody, dostaneme potřebný čas ohřevu dosazením do vztahu (61) hodnoty celkového výkonu P_k daného kinetickou energií svazku:

$$t = \frac{Q}{P_k} = \frac{c \cdot V \cdot \rho \cdot (T_2 - T_1)}{P_k}.$$

Číselně:

$$t = \frac{4180 \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-1} \cdot 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 998,2 \text{ kg/m}^3 \cdot 80 \text{ K}}{576 \text{ W}} = 116 \text{ s}.$$

Počet iontů ve svazku za časovou jednotku je $1,1 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$. Z terče je potřeba odvést 35,7 W tepelného výkonu. Zhruba každou půl hodinu bychom si uvařili šálek vody na kávu nebo čaj. Olovo má velmi nízkou teplotu tání, ta omezuje možný tepelný výkon a intenzitu svazku. U terčů z transuranů, které mají vysokou teplotu tání, a s využitím nových urychlovačů se předpokládají intenzity i o dva řády vyšší a šálek kávy bychom pak měli každých pár minut až zlomků minuty. I z toho je vidět, jak velký tepelný výkon na velmi tenkém terči je, a jak náročné je terče ozařované tak intenzivním svazkem uchladiť. Využívají se proto rotující terče, kdy se ozařuje jen jejich menší část a zbytek se pouze chladí. Celkový výkon ukrytý v kinetické energii svazku by vodu pro šálek kávy ohřál za 116 s.

2.4 Kinematika, srážky, jaderné reakce a rozpady

Důležitou veličinou při popisu kinematiky jaderných procesů je energie reakce Q (písmen se nedostává, takže standardně se využívá označení Q pro náboj, teplo i energii reakce, ani my jsme se tak bohužel nemohli vyhnout stejnému označení různých veličin). Energie reakce je definována jako rozdíl mezi sumou klidových energií částic před reakcí a sumou klidových energií částic po reakci. Ukazuje, jak velká hodnota klidové energie se během reakce přeměnila na energii kinetickou. Ze zákona zachování energie vyplývá, že energii reakce můžeme vyjádřit také jako rozdíl sumy kinetických energií částic po reakci a sumy kinetických energií částic před reakcí (index i u závorky znamená initial, tedy počáteční a f je final, tedy po reakci):

$$Q = \left(\sum_{i=1}^n E_{0i} \right)_i - \left(\sum_{j=1}^m E_{0j} \right)_f = \left(\sum_{i=1}^m E_{ki} \right)_f - \left(\sum_{j=1}^n E_{kj} \right)_i \quad (62)$$

Je-li energie reakce kladná, jde o exoergickou reakci a energie se při ní uvolňuje, nulová hodnota energie reakce znamená, že se jedná o pružný rozptyl. Při záporné energii reakce se jedná o endoergickou reakci. K její realizaci musíme dodat jistou prahovou energii.

V průběhu všech procesů musí být splněny zákony zachování energie a hybnosti. Platí tak, že celková energie uzavřeného systému se musí zachovávat a suma celkových energií před reakcí se musí rovnat sumě celkových energií po reakci:

$$E = \left(\sum_{i=1}^n E_i \right)_i = \left(\sum_{j=1}^m E_j \right)_f \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n (E_{0i} + E_{ki}) \right)_i = \left(\sum_{j=1}^m (E_{0j} + E_{kj}) \right)_f, \quad (63)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n E_{ki}\right)_i + \left(\left(\sum_{i=1}^n E_{0i}\right)_i - \left(\sum_{j=1}^m E_{0j}\right)_f\right) = \left(\sum_{j=1}^m E_{kj}\right)_f,$$

$$\left(\sum_{i=1}^n E_{ki}\right)_i + Q = \left(\sum_{j=1}^m E_{kj}\right)_f \Rightarrow E_{ki} + Q = E_{kf} \quad (64)$$

Totéž musí platit pro celkovou hybnost systému. Vektorový součet hybností před reakcí se tak musí rovnat vektorovému součtu hybností po reakci:

$$\mathbf{p} = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i\right)_i = \left(\sum_{j=1}^m \mathbf{p}_j\right)_f \quad (65)$$

Příklad 14: Kopernicium ^{278}Cn ($A_r = 278,164\ 179$) je produkováno studenou fúzí sloučením ^{70}Zn ($A_r = 69,925\ 319$) a ^{208}Pb ($A_r = 207,976\ 652$). Jaká je rychlost vytvořeného složeného jádra, jestliže měl svazek zinku kinetickou energii 5,0 MeV/A? Jaká je excitační energie? Kolik neutronů se může vypařit, jestliže je vazebná energie na jeden nukleon 7,5 MeV? Jaká je výška coulombovské bariéry?

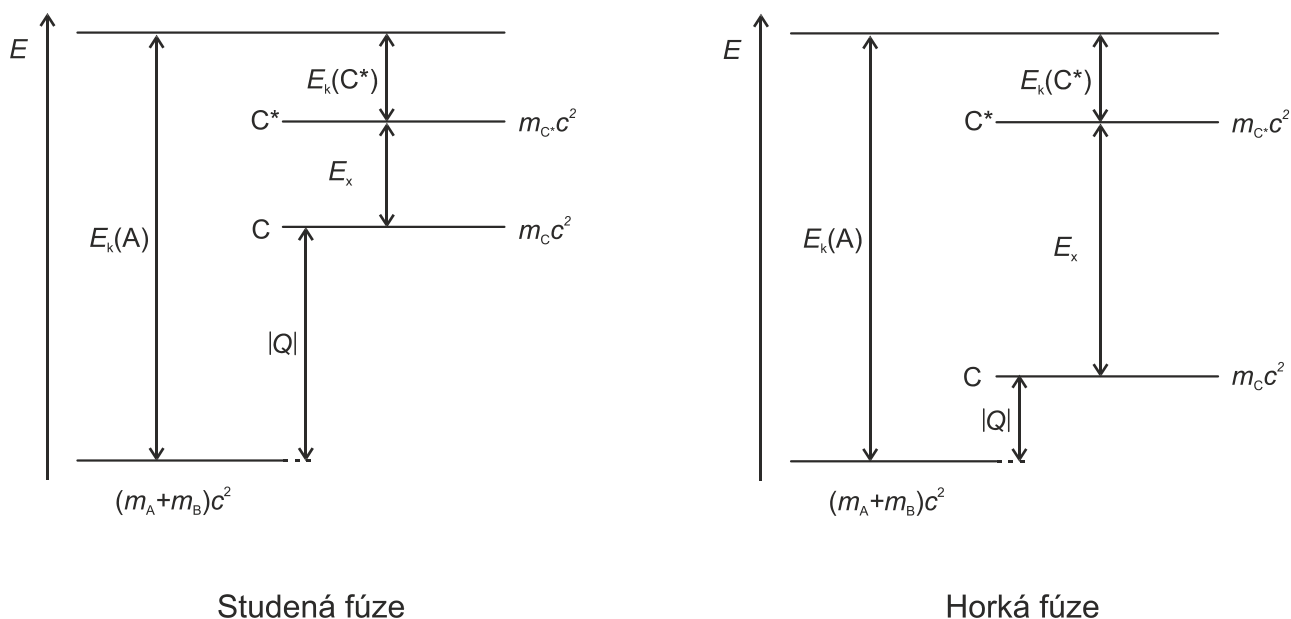
Po reakci Zn a Pb vznikne excitované jádro Cn. Excitovaný stav má energii, která je větší nežli energie základního stavu o hodnotu E_x (excitační energie). Klidová energie excitovaného jádra, a tedy i hmotnost, je vyšší než jádra v základním stavu. Excitační energie E_x se jádro může zbavit ztrátou (vypařením) neutronů nebo vyzářením fotonů gama.

Při výpočtu energie reakce lze v tomto případě s výhodou využít, že před reakcí a po ní máme celkově stejný počet nejen protonů v jádrech, ale také elektronů v atomových obalech. Rozdíl klidových energií atomů před a po reakci je stejný jako rozdíl klidových energií jader. Hmotnosti jader a tím i jejich klidové energie určíme ze vztahu (24), číselně:

$$E_0(^{70}\text{Zn}) = m_j c^2(^{70}\text{Zn}) = 69,925\ 319 \cdot 931,494\ 095\ \text{MeV} - 30 \cdot 0,510\ 999\ \text{MeV} = 65\ 119,692\ \text{MeV},$$

$$E_0(^{208}\text{Pb}) = 207,976\ 652 \cdot 931,494\ 095\ \text{MeV} - 82 \cdot 0,510\ 999\ \text{MeV} = 193\ 687,121\ \text{MeV},$$

$$E_0(^{278}\text{Cn}) = 278,164179 \cdot 931,494095\ \text{MeV} - 112 \cdot 0,510999\ \text{MeV} = 259\ 051,058\ \text{MeV}.$$



Schématické zobrazení zákona zachování energie při vzniku složeného jádra C v případě studené fúze (vlevo) a horké fúze (napravo). S terčovým jádrem B v klidu se spojí projektilové jádro A s kinetickou energií $E_k(A)$. U studené fúze je třeba dodat velkou energii na pokrytí záporné energie reakce Q a excitační energie E_x složeného jádra je tak nízká. Naopak u horké fúze má záporná energie reakce nízkou hodnotu a velikost excitační energie je tak vysoká.

Energie reakce Q pak je:

$$Q = [m_a(^{70}\text{Zn})c^2 + m_a(^{208}\text{Pb})c^2] - m_a(^{278}\text{Cn})c^2,$$

$$Q = [A_r(^{70}\text{Zn}) \cdot m_u c^2 + A_r(^{208}\text{Pb}) \cdot m_u c^2] - A_r(^{278}\text{Cn}) \cdot m_u c^2,$$

$$Q = [(A_r(^{70}\text{Zn}) + A_r(^{208}\text{Pb})) - A_r(^{278}\text{Cn})] \cdot m_u c^2.$$

Číselně:

$$Q = [(69,925\,319 + 207,976\,652) - 278,164\,179] \cdot 931,494\,095 \text{ MeV} = -244,245 \text{ MeV}.$$

V daném případě, kdy využíváme studenou fúzi a projektil i terč s velmi vysokou vazebnou energií, dostáváme poměrně vysokou zápornou hodnotu energie reakce. Excitační energie E_x vzniklého složeného jádra tak bude relativně nízká.

Celková kinetická energie je energie na jeden nukleon vynásobená počtem nukleonů zinku $E_k = 350 \text{ MeV}$. Napíšeme zákon zachování energie pro danou reakci

$$E_0(\text{Zn}) + E_{ki} + E_0(\text{Pb}) = E_0^*(\text{Cn}) + E_{kf}, \quad (66)$$

$$E_0(\text{Zn}) + E_{ki} + E_0(\text{Pb}) = E_0(\text{Cn}) + E_x + E_{kf}. \quad (67)$$

Kde $E_0^*(\text{Cn})$ je klidová energie excitovaného stavu jádra kopernicia, kterou můžeme vyjádřit jako součet klidové energie kopernicia $E_0(\text{Cn})$ a excitační energie E_x . Kinetická energie jádra kopernicia je E_{kf} . Využijeme toho, že rozdíl mezi klidovou energií před a po reakci je energie reakce:

$$Q = E_0(\text{Zn}) + E_0(\text{Pb}) - E_0^*(\text{Cn}) = E_0(\text{Zn}) + E_0(\text{Pb}) - E_0(\text{Cn}) - E_x.$$

Zákon zachování z rovnice (67) tak můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$E_{ki} + Q = E_{kf} + E_x. \quad (68)$$

Vzhledem k tomu, že rovnice obsahuje dvě neznámé, použijeme ještě zákon zachování hybnosti. Protože $E_{ki} = 350 \text{ MeV}$ a klidové energie jader vstupujících do reakce jsou řádu 10^4 MeV a 10^5 MeV , provedeme nejprve nerelativistické řešení. Pro hybnost platí vztah (12):

$$E_k = \frac{p^2}{2m_0} \quad \text{odtud } p = \sqrt{2m_0 E_k} = \frac{\sqrt{2E_0 E_k}}{c}.$$

Zákon zachování hybnosti pro naši reakci bude mít tvar:

$$p_i = p_f \Rightarrow p(\text{Zn}) = p(\text{Cn}^*), \quad (69)$$

$$\frac{\sqrt{2E_0(\text{Zn})E_{ki}}}{c} = \frac{\sqrt{2E_0^*(\text{Cn})E_{kf}}}{c},$$

$$E_0(\text{Zn})E_{ki} = E_0^*(\text{Cn})E_{kf}. \quad (70)$$

vyjádříme kinetickou energii po reakci E_{kf} pomocí kinetické energie před reakcí E_{ki} . Využijeme toho, že v našem případě jsou hodnoty kinetické energie, energie reakce i excitace velmi nízké proti klidovým energiím (klidové energie jsou o tři řády větší). V nerelativistickém přiblížení tak lze při určování hybnosti excitační energii kopernicia vůči klidové energii jeho základního stavu zanedbat ($E_0^*(\text{Cn}) \doteq E_0(\text{Cn})$):

$$E_{kf} = \frac{E_0(\text{Zn})E_{ki}}{E_0^*(\text{Cn})} = \frac{E_0(\text{Zn})E_{ki}}{E_0(\text{Cn}) + E_x} \doteq \frac{E_0(\text{Zn})E_{ki}}{E_0(\text{Cn})}. \quad (71)$$

Dosadíme za E_{kf} do vztahu (68):

$$E_{ki} + Q = \frac{E_0(\text{Zn})}{E_0(\text{Cn})} E_{ki} + E_x.$$

Určíme excitační energii E_x :

$$E_x = Q + \left(1 - \frac{E_0(\text{Zn})}{E_0(\text{Cn})}\right) E_{ki}. \quad (72)$$

Číselně:

$$E_x = -244,245 \text{ MeV} + \left(1 - \frac{65 \cdot 119,692 \text{ MeV}}{259 \cdot 051,058 \text{ MeV}}\right) \cdot 350 \text{ MeV} = 17,772 \text{ MeV}.$$

Rychlost částice alfa určíme z nerelativistického vztahu mezi rychlostí a kinetickou energií (10). Dosadíme za kinetickou energii po reakci E_{kf} ze vztahu (71):

$$\frac{v_f}{c} = \sqrt{\frac{2 E_{kf}}{E_0(\text{Cn})}} = \sqrt{\frac{2 \frac{E_0(\text{Zn}) E_{ki}}{E_0(\text{Cn})}}{E_0(\text{Cn})}} = \frac{\sqrt{2 E_0(\text{Zn}) E_{ki}}}{E_0(\text{Cn})}.$$

Číselně:

$$\frac{v_f}{c} = \frac{\sqrt{2 \cdot 65 \cdot 119,685 \text{ MeV} \cdot 350 \text{ MeV}}}{259 \cdot 051,032 \text{ MeV}} = 0,026 \text{ 06}.$$

Podívejme se, jaký výsledek dostaneme při určování excitační energie, pokud využijeme speciální teorie relativity. Platí zákon zachování hybnosti a za hybnost můžeme dosadit z relativistického vztahu (16) mezi hybností a kinetickou energií:

$$p_f c = p_i c \Rightarrow \sqrt{2 E_{ki} E_0(\text{Zn}) + E_{ki}^2} = \sqrt{2 E_{kf}^* E_0^*(\text{Cn}) + (E_{kf}^*)^2},$$

$$E_{ki}^2 + 2 E_0(\text{Zn}) E_{ki} = (E_{kf}^*)^2 + 2 E_0^*(\text{Cn}) E_{kf}^*. \quad (73)$$

Jako druhou rovnici do soustavy rovnic použijeme zákon zachování energie (66), z něhož vyjádříme E_{kf}^* :

$$E_{kf}^* = E_0(\text{Zn}) + E_{ki} + E_0(\text{Pb}) - E_0^*(\text{Cn})$$

a dosadíme do (73). Pro lepší přehlednost výpočtu provedeme substituci

$$M = E_0(\text{Zn}) + E_{ki} + E_0(\text{Pb}), \quad N = E_{ki}^2 + 2 E_0(\text{Zn}) E_{ki},$$

$$N = (M - E_0^*(\text{Cn}))^2 + 2 E_0^*(\text{Cn}) (M - E_0^*(\text{Cn})).$$

Po umocnění, roznásobení a odečtení

$$E_0^*(\text{Cn}) = \sqrt{M^2 - N},$$

$$E_0^*(\text{Cn}) = 259\,068,615 \text{ MeV}.$$

Excitační energii opět získáme odečtením

$$E_x = E_0^*(\text{Cn}) - E_0(\text{Cn}) = 259\,068,615 \text{ MeV} - 259\,051,058 \text{ MeV} = 17,557 \text{ MeV}.$$

Rozdíl mezi relativistickým a nerelativistickým řešením je 0,4 %. Nyní vypočítáme rychlost pomocí relativistického řešení ze vztahu (15), číselně:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{259\,051,058 \text{ MeV} + 17,557 \text{ MeV}}{259\,051,058 \text{ MeV} + 17,557 \text{ MeV} + 88,198 \text{ MeV}} \right)^2} = 0,026\,09.$$

Po srovnání s hodnotami, které jsme získali v nerelativistickém přiblížení, lze konstatovat, že obě hodnoty jsou ve velmi dobré shodě a rozdíl je nižší než procento.

Určíme hodnotu výšky coulombovské bariery E_C ze vztahu (30) po dosazení hodnot pro konkrétní jádra:

$$E_C = \alpha \frac{Z_{\text{Zn}} Z_{\text{Pb}} \hbar c}{R_0 (\sqrt[3]{A_{\text{Zn}}} + \sqrt[3]{A_{\text{Pb}}})}.$$

Číselně:

$$E_C = \frac{1}{137} \frac{30 \cdot 82 \cdot 197,3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{1,3 \text{ fm} (\sqrt[3]{70} + \sqrt[3]{208})} = 271,2 \text{ MeV}.$$

Při studené fúzi jádra ^{70}Zn a ^{208}Pb vznikne i při poměrně vysoké energii nalétávajícího projektilu, která významně překračuje coulombovskou bariéru jádro ^{278}Cn s relativně nízkou excitací 17,6 MeV. Vzhledem k tomu, že vazebná energie na jeden nukleon převyšuje 7 MeV, umožňuje to uvolnění maximálně dvou neutronů. Rychlost složeného jádra je 0,02609 c . Rozdíl mezi relativistickým a nerelativistickým výpočtem je menší než procento. Při studené fúzi se dají využívat energie iontů svazku značně překračující výšku coulombovské bariery, přesto se většinou excitační energie pohybuje velmi nízko, mezi 10 MeV až 20 MeV.

Příklad 15: Jádro flerovia ^{288}Fl ($A_r = 288,187\,916$) je pomocí horké fúze produkováno v reakci ^{48}Ca ($A_r = 47,952\,523$) a ^{240}Pu ($A_r = 240,053\,812$). Jaká musí být kinetická energie na nukleon, aby byla excitační energie stejná jako u studené fúze v předchozím případě, tedy 17,6 MeV? Jaká je výška coulombovské bariery? Jaká bude excitační

energie, pokud bude kinetická energie projektilu stejná jako v předchozím případě, tedy 5,0 MeV/A?

Při výpočtu energie reakce Q lze opět využít, že před reakcí a po ní máme celkově stejný počet nejen protonů v jádrech, ale také elektronů v atomových obalech. Rozdíl klidových energií atomů před a po reakci je stejný jako rozdíl klidových energií jader. Hmotnosti jader a tím i jejich klidové energie určíme ze vztahu (24), číselně:

$$E_0(^{48}\text{Ca}) = 47,952\,523 \cdot 931,494\,095 \text{ MeV} - 20 \cdot 0,510\,999 \text{ MeV} = -244,245 \text{ MeV},$$

$$E_0(^{240}\text{Pu}) = 240,053\,812 \cdot 931,494\,095 \text{ MeV} - 94 \cdot 0,510\,999 \text{ MeV} = 223\,560,674 \text{ MeV}.$$

$$E_0(^{288}\text{Fl}) = 288,187\,916 \cdot 931,494\,095 - 114 \cdot 0,510\,999 = 268\,387,088 \text{ MeV}.$$

Energie reakce je pak

$$Q = \left[\left(A_r(^{48}\text{Ca}) + A_r(^{240}\text{Pu}) \right) - A_r(^{288}\text{Fl}) \right] \cdot m_u c^2.$$

Číselně:

$$Q = [(47,952\,523 + 240,053\,812) - 288,187\,916] \cdot 931,494\,095 \text{ MeV} = -169,142 \text{ MeV}.$$

Využijeme nerelativistické přiblížení a postupovat budeme stejně jako v předchozím případě. Dosadíme ze vztahu (71) do vztahu (68), přičemž dosadíme za konkrétní účastníky reakce v tomto případě:

$$E_{ki} + Q = \frac{E_0(^{48}\text{Ca})}{E_0(^{288}\text{Fl})} \cdot E_{ki} + E_x.$$

Ze vztahu vyjádříme potřebnou kinetickou energii E_{ki} projektilu:

$$E_{ki} = \frac{E_x - Q}{\left(1 - \frac{E_0(^{48}\text{Ca})}{E_0(^{288}\text{Fl})} \right)}.$$

Číselně:

$$E_{ki} = \frac{17,6 \text{ MeV} - (-169,142 \text{ MeV})}{\left(1 - \frac{44\,657,272 \text{ MeV}}{268\,387,088 \text{ MeV}} \right)} = 224,02 \text{ MeV}.$$

Pomocí vztahu (30) a dosazením hodnot pro konkrétní jádra určíme výšku coulombovské bariéry E_C :

$$E_C = \alpha \frac{Z_{Ca} Z_{Pu} \hbar c}{R_0 (\sqrt[3]{A_{Ca}} + \sqrt[3]{A_{Pu}})}$$

Číselně:

$$E_C = \frac{1}{137} \frac{20 \cdot 94 \cdot 197,3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{1,3 \text{ fm} (\sqrt[3]{48} + \sqrt[3]{240})} = 211,5 \text{ MeV}.$$

Určíme excitační energii pro případ, že je kinetická energie projektilu 5,0 MeV/A. Celková kinetická energie je 240 MeV. Kinetická energie E_{kf} složeného jádra je:

$$E_{kf} = \frac{E_0(^{48}\text{Ca})}{E_0(^{288}\text{Fl})} \cdot E_{ki}.$$

Číselně:

$$E_{kf} = \frac{44\,657,272 \text{ MeV}}{268\,387,088 \text{ MeV}} \cdot 240 \text{ MeV} = 39,934 \text{ MeV}.$$

Excitační energie je:

$$E_x = Q + E_{ki} - E_{kf}.$$

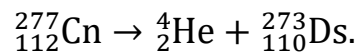
Číselně:

$$E_x = -169,142 \text{ MeV} + 240 \text{ MeV} - 39,934 \text{ MeV} = 30,924 \text{ MeV}$$

V případě horké fúze musíme pro získání nízké excitační energie mít energii jader svazku mnohem nižší. Pro dosažení stejné hodnoty excitační energie jako v předchozím případě musí být kinetická energie projektilu pouze 224 MeV, to je 4,7 MeV/A. Dostáváme se tak velmi blízko hodnotě coulombovské bariéry, která je 211 MeV. Pravděpodobnost jejího překonání tak velmi klesá. Pokud použijeme u projektilu stejnou kinetickou energii na nukleon, tedy 5,0 MeV/A, dostaneme celkovou kinetickou energii 240 MeV a jsme pořád dost blízko výšce coulombovské bariéry. Excitační energie však bude již 31 MeV, v tomto konkrétním případě se mohou uvolnit až čtyři neutrony. V případě horké fúze se častěji používají energie svazku, které vedou k vyšším excitačním energiím mezi 30 MeV až 40 MeV a většinou dochází k emisi více neutronů.

Příklad 16: Určete energii částice alfa, která vzniká při rozpadu alfa jádra izotopu kopernicia ^{277}Cn ($A_r = 277,163\,610$). Vzniklé dceřiné jádro je v základním stavu a má hmotnost ($A_r = 273,148\,530$). O jaké jádro jde? Jakou má částice alfa energii, hybnost a rychlost?

Částice alfa odnese při rozpadu dva protony a dva neutrony:



Vzniká dceřiné jádro darmstadtium ${}_{110}^{273}\text{Ds}$.

Pro rozpad platí zákon zachování energie. Na začátku předpokládáme jádro kopernicia v klidu a kinetickou energii před reakcí budeme považovat za nulovou.

$$E_0(\text{Cn}) = E_0(\alpha) + E_0(\text{Ds}) + E_{kf},$$

$$Q = E_{kf}.$$

Kinetická energie po reakci je rozdělena mezi kinetickou energii částice alfa a darmstadtia. Pro určení energie potřebujeme klidové energie nuklidů, které určíme ze vztahu odpovídajícímu vztahu (24) pro klidovou hmotnost, číselně:

$$\begin{aligned} E_0({}^{277}\text{Cn}) &= 277,163\,610 \cdot 931,494\,095 \text{ MeV} - 112 \cdot 0,510\,999 \text{ MeV} = \\ &= 258\,119,034 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_0({}^{273}\text{Ds}) &= 273,148\,530 \cdot 931,494\,095 \text{ MeV} - 110 \cdot 0,510\,999 \text{ MeV} = \\ &= 254\,380,033 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Energie rozpadu alfa je v tomto případě:

$$Q = E_0(\text{Cn}) - (E_0(\text{Ds}) + E_0(\alpha)).$$

Číselně:

$$Q = 258\,119,034 \text{ MeV} - (254\,380,033 \text{ MeV} + 3\,727,379 \text{ MeV}) = 11,622 \text{ MeV}.$$

Ze zákona zachování energie plyne, že se energie reakce, která se přemění na kinetickou energii, rozdělí mezi jádro darmstadtia a částici alfa.

$$E_k(\alpha) + E_k(\text{Ds}) = Q. \quad (74)$$

Protože energie rozpadu alfa je řádu 10^1 MeV a klidová energie částice alfa 10^4 MeV, použijeme nerelativistický vztah pro hybnost (12)

$$p = \frac{\sqrt{2E_0E_k}}{c}.$$

Hybnost před rozpadem považujeme za nulovou, proto podle zákona zachování hybnosti bude nulová také hybnost po rozpadu. Hybnost částice alfa tak musí být stejná jako hybnost odskočeného jádra darmstadtia. Situace připomíná výstřel z děla - částice alfa, která má proti jádru darmstadtia malou hmotnost, vyletí podstatně větší rychlostí, než bude rychlost odskoku těžkého jádra.

$$p(\alpha) = p(\text{Ds}) \Rightarrow (p(\alpha))^2 = (p(\text{Ds}))^2 \Rightarrow E_0(\alpha)E_k(\alpha) = E_0(\text{Ds})E_k(\text{Ds}),$$

$$E_k(\text{Ds}) = \frac{E_0(\alpha)E_k(\alpha)}{E_0(\text{Ds})},$$

Dosadíme do rovnice (74)

$$E_k(\alpha) + \frac{E_0(\alpha)E_k(\alpha)}{E_0(\text{Ds})} = Q,$$

$$E_k(\alpha) \left(1 + \frac{E_0(\alpha)}{E_0(\text{Ds})} \right) = Q,$$

$$E_k(\alpha) = \frac{Q}{1 + \frac{E_0(\alpha)}{E_0(\text{Ds})}}. \quad (75)$$

Číselně:

$$E_k(\alpha) = \frac{11,622 \text{ MeV}}{1 + \frac{3\,727,379 \text{ MeV}}{254\,380,033 \text{ MeV}}} = 11,454 \text{ MeV}.$$

Hybnost určíme pomocí nerelativistického vztahu (12):

$$p_\alpha = \frac{\sqrt{2E_0E_k}}{c} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3\,727,379 \text{ MeV} \cdot 11,454 \text{ MeV}}}{c} = 292,210 \frac{\text{MeV}}{c}.$$

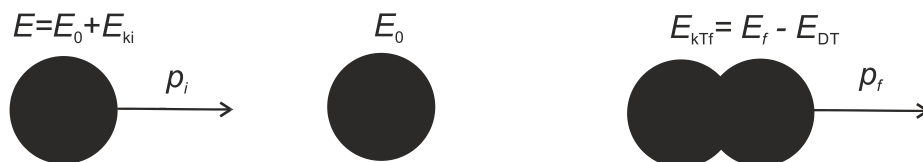
Rychlost částice alfa určíme z nerelativistického vztahu mezi rychlostí a kinetickou energií (10), číselně:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2 \cdot 11,454 \text{ MeV}}{3\,727,379 \text{ MeV}}} = 0,078\,4.$$

Dceřiné jádro, které vzniklo, byl izotop darmstadtia ^{273}Ds . Kinetická energie alfa částice je 11,5 MeV, hybnost 292,2 MeV/c a rychlost 0,078 4c.

Příklad 17: Klíčovým urychlovačem celého urychlovačového komplexu v laboratoři CERN je protonový synchrotron (PS), který poskytuje protony o kinetické energii až 28 GeV. Předpokládejme, že urychlený proton narazí do protonu v klidu a dojde k nepružné srážce. Kinetická energie dopadajícího protonu E_{ki} se při nepružné srážce rozdělí na dvě části: na část, kterou si soustava, tvořená dvěma protony, ponechá

v důsledku zákona zachování hybnosti E_{kTf} a je spojena s pohybem těžiště a na část, nazvěme ji efektivní energií dostupnou v těžišti E_{EDT} , o kterou může narůst klidová energie produktů reakce. V částicové fyzice se často využívá energie dostupná v těžišti E_{DT} . Pokud by v reakci vznikla pouze jedna částice, tak je to její klidová energie. Platí tak, že efektivní energie dostupná v těžišti E_{EDT} je energie dostupná v těžišti E_{DT} snižená o součet klidové energie terče a projektilu. V situaci, kdy se veškerá efektivní energie dostupná v těžišti E_{EDT} přemění na klidovou energii vyprodukovaných částic, je její velikost shodná s velikostí energií reakce Q (tyto veličiny se pak liší pouze znaménkem). Protože se v daném případě přeměňuje kinetická energie na klidovou energii částic, je energie reakce záporná. Vypočítejte efektivní energii dostupnou v těžišti a určete, jaká část kinetické energie urychleného protonu se na ni přemění. Situaci zachycuje následující obrázek



Urychlený proton má před srážkou kinetickou energii E_{ki} , klidovou energii E_0 a hybnost p_i . Proton v klidu má klidovou energii E_0 a hybnost nulovou. Po nepružné srážce má dvojice protonů energii E_f , kinetickou energii E_{kTf} , klidovou energii o velikosti E_{DT} a hybnost p_f . Je třeba zdůraznit, že tato klidová energie není dvojnásobkem klidové energie protonu. Jde o klidovou energii systému dvou protonů. Tedy o energii systému, pokud je jeho těžiště v klidu a veškerý pohyb je jen relativní vůči těžišti. Stejně tak mluvíme o klidové energii atomu, i když se v tomto atomu pohybují v případě supertěžkých prvků elektrony i rychlostmi blízkými rychlosti světla. Tato energie je zmiňovanou energií dostupnou v těžišti E_{DT} .

Pro srážku platí zákon zachování hybnosti:

$$p_i = p_f \quad (76)$$

a zákon zachování energie:

$$E + E_0 = E_f. \quad (77)$$

Po úpravě

$$(E_0 + E_k) + E_0 = 2E_0 + E_k = E_f. \quad (78)$$

Využijeme relativistický vztah mezi energií a hybností (16)

$$p_i = \frac{\sqrt{E_{ki}^2 + 2E_0E_{ki}}}{c}.$$

Nyní vyjádříme hybnost p_f po srážce:

$$E_f^2 = (p_f c)^2 + E_{DT}^2,$$

$$p_f = \frac{\sqrt{E_f^2 - E_{DT}^2}}{c}.$$

Porovnáme hybnost p_i před srážkou s hybností p_f po srážce, které se mají podle zákona zachování hybnosti (76) rovnat:

$$\frac{\sqrt{E_{ki}^2 + 2E_0E_{ki}}}{c} = \frac{\sqrt{E_f^2 - E_{DT}^2}}{c},$$

$$E_{ki}^2 + 2E_0E_{ki} = E_f^2 - E_{DT}^2.$$

Za energii po srážce dosadíme ze vztahu (78):

$$E_{ki}^2 + 2E_0E_{ki} = (2E_0 + E_{ki})^2 - E_{DT}^2.$$

Z rovnice vyjádříme nejprve klidovou energii po srážce

$$E_{DT} = \sqrt{4E_0^2 + 2E_0E_{ki}} \quad (79)$$

a pak kinetickou energii těžiště po srážce E_{kTf}

$$E_{kTf} = E_f - E_{DT} = 2E_0 + E_{ki} - \sqrt{4E_0^2 + 2E_0E_{ki}}. \quad (80)$$

Nyní již vyjádříme efektivní energii dostupnou v těžišti E_{EDT} :

$$E_{EDT} = E_{ki} - E_{kTf} = \sqrt{4E_0^2 + 2E_0E_{ki}} - 2E_0. \quad (81)$$

Číselné řešení pro zadané hodnoty

$$E_{EDT} = \sqrt{4 \cdot 938,272^2 + 2 \cdot 938,272 \cdot 28000} \text{ MeV} - 2 \cdot 938,272 \text{ MeV} =$$

$$= 5\,611 \text{ MeV}.$$

Nakonec vyjádříme požadovaný poměr

$$\frac{E_{EDT}}{E_{ki}} = \frac{5\,611 \text{ MeV}}{28\,000 \text{ MeV}} = 0,20 \text{ tedy } 20 \text{ \%}.$$

Z výpočtu vyplývá, že experiment je nastavený tak, že „plýtváme energií“. Pouze 20 % z energie urychleného protonu lze využít pro nárůst klidové energie produktů reakce anebo pro produkci nových částic. Zbývajících 80 % si odnáší spojené částice jako kinetickou energii spojenou s pohybem těžiště. Pokud bychom urychlili protony na dvojnásobnou energii, byla by v těžišti dostupná energie 15,3 % kinetické energie svazku a při zvýšení na desetinásobnou energii by to bylo již jen 7,5 %.

Energie dostupná v těžišti E_{DT} je velmi zajímavá veličina, která se v průběhu reakce zachovává. Toto tvrzení dokážeme na srážce dvou částic a zobecníme pro libovolný počet částic.

Nechť mají částice před srážkou energie E_1 a E_2 a hybnosti \mathbf{p}_1 a \mathbf{p}_2 . Po srážce vznikne složený systém o energii E_f a hybnosti \mathbf{p}_f .

Platí zákony zachování

$$E_1 + E_2 = E_f,$$

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_f$$

a relativistický vztah

$$E_f^2 = E_{DT}^2 + (\mathbf{p}_f c)^2.$$

Dosadíme za \mathbf{p}_f velikost hybnosti $|\mathbf{p}_f|$, což je hybnost systému částic jako celku, neboli hybnost těžiště, po srážce

$$(E_1 + E_2)^2 = E_{DT}^2 + (|\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2|c)^2$$

$$E_{DT} = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (|\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2|c)^2} \quad (82)$$

Po zobecnění pro n částic můžeme psát

$$E_{DT} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n E_i\right)^2 - \left(\left|\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i\right|c\right)^2}, \quad (83)$$

Celkový součet energií je celková energie systému a zachovává se díky zákonu zachování energie, celková hybnost je dána celkovým vektorovým součtem hybností a zachovává se díky zákonu zachování hybnosti. Energie dostupná v těžišti je současně veličinou, která je invariantní z hlediska Lorentzovy transformace a speciální teorie relativity. Znamená to, že energie dostupná v těžišti před reakcí v laboratoři E_{DT} je stejná jako tato energie po reakci v těžišťové soustavě \tilde{E}_{DT} :

$$E_{DT} = \tilde{E}_{DT} \Rightarrow E_{DT}^2 = \tilde{E}_{DT}^2. \quad (84)$$

V našem případě srážky protonů na urychlovači PS má být energie terče v laboratoři před reakcí rovna klidové energii protonu E_0 a energie projektilu E součtu jeho klidové energie a kinetické energie $E_0 + E_{ki}$. Hybnost před reakcí \mathbf{p}_i je dána pouze hybností protonu svazku. V těžišťové soustavě je celková hybnost z definice těžiště vždy nulová.

V těžišťové soustavě je kinetická energie těžiště nulová a po reakci je tak celková energie v těžišti dána součtem klidových energií protonů a efektivní energie dostupné v těžišti E_T :

$$(E + E_0)^2 - (p_i c)^2 = (2E_0 + E_{EDT})^2,$$

$$E^2 + 2EE_0 + E_0^2 - (p_i c)^2 = 4E_0^2 + 4E_0E_{EDT} + E_{EDT}^2.$$

Dosadíme za celkovou energii projektilu:

$$2EE_0 = 2E_0^2 + 4E_0E_{EDT} + E_{EDT}^2.$$

Celková energie je součtem klidové a kinetické:

$$2(E_0 + E_{ki})E_0 = 2E_0^2 + 4E_0E_{EDT} + E_{EDT}^2,$$

$$E_{EDT}^2 + 4E_0E_{EDT} - 2E_0E_{ki} = 0.$$

Dostaneme kvadratickou rovnici, ze které můžeme vyjádřit energii reakce (zajímají nás pouze kladná řešení):

$$E_{EDT} = -2E_0 + \sqrt{4E_0^2 + 2E_0E_{ki}},$$

což je stejný výsledek, jako jsme obdrželi v předchozím případě, viz vztah (81). Využití relativisticky invariantní veličiny energie dostupné v těžišti je velice výhodné pro hledání prahové energie pro relativistické reakce.

Pro náš případ srážky dvou protonů tak vyřešíme ještě jednu úlohu. Na jakou energii by musel být urychlen proton, aby po nepružné srážce s protonem v klidu byla velikost efektivní energie dostupná v těžišti (velikost energie reakce) $E_{EDT} = 40$ GeV? Ta by například stačila pro produkci páru částice a antičástice, při které by každá měly klidovou energií 20 GeV.

Pro řešení využijeme výše odvozený vztah (81)

$$E_{EDT} = Q = \sqrt{4E_0^2 + 2E_0E_k} - 2E_0,$$

z něhož vyjádříme kinetickou energii před srážkou

$$E_{ki} = \frac{E_{EDT}^2 + 4E_{EDT}E_0}{2E_0} = \frac{E_{EDT}^2}{2E_0} + 2E_{EDT}. \quad (85)$$

Číselně

$$E_{ki} = \frac{40^2}{2 \cdot 0,938 \ 280} \text{ GeV} + 2 \cdot 40 \text{ GeV} \doteq 933 \text{ GeV}.$$

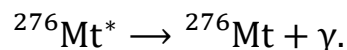
Urychlovače takovéto energie byly realizovány až koncem dvacátého století (CERN, FERMILAB).

Odstranění tohoto problému nabízí metoda „vstřícných svazků“. Bude-li uspořádání takové, že se vstřícně srazí dva protony, každý o energii 28 GeV, bude velikost efektivní energie dostupné v těžišti 56 GeV, neboť kinetická energie soustavy (těžiště) je před srážkou i po srážce $E_{kTf} = E_{kTi} = 0$ (celková hybnost soustavy je před i po srážce nulová). Pro efekt srážky se v tomto případě využije celá kinetická energie obou protonů! V případě shody mezi laboratorní a těžišťovou soustavou je pro danou energii svazku urychlovače velikost energie dostupné v těžišti maximální. Toto je výhoda metody vstřícných svazků, která je realizována na všech velkých urychlovačích nabitých částic.

Pro tvorbu supertěžkých prvků není potřeba tak velká energie svazku, proto se mohou používat stacionární terčíky, do kterých naráží urychlené ionty.

Příklad 18: Jádro meitneria ^{276}Mt ($A_r = 276,151 \ 708$) je v excitovaném stavu s energií 434,0 keV a přejde do základního stavu vyzářením fotonu záření gama. Jaká je energie odrazu? Jaká by musela být doba života příslušné hladiny, aby mohlo dojít k Mössbauerovu jevu (rezonanční absorpci)? Část této úlohy týkající se Mössbauerova jevu jde nad rámec učiva fyziky pro středoškoláky a je uvedena spíše pro zajímavost.

Reakci lze zapsat



Klidovou energii jádra meitneria opět dostaneme z modifikace vztahu (24) pro klidovou hmotnost jádra, číselně:

$$\begin{aligned} E_0(^{276}\text{Mt}) &= 276,151 \ 708 \cdot 931,494 \ 095 \text{ MeV} - 109 \cdot 0,510 \ 999 \text{ MeV} = \\ &= 257 \ 177,986 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Energie rozpadu je v tomto případě rovna energii excitovaného stavu:

$$Q = E_X.$$

Ta se na základě zákona zachování energie rozdělí mezi emitovaný foton a odražené jádro:

$$Q = E_\gamma + E_k. \quad (86)$$

Ze zákona zachování hybnosti platí pro excitované jádro, které bylo na začátku v klidu, že velikosti hybností fotonu a jádra se po vyzáření fotonu musí rovnat:

$$p_\gamma = p_j \Rightarrow p_\gamma c = p_j c \Rightarrow (p_\gamma c)^2 = (p_j c)^2. \quad (87)$$

Porovnáním klidové energie jádra 10^5 MeV s energií rozpadu 10^{-1} MeV docházíme k názoru, že hybnost jádra můžeme popsat nerelativisticky vztahem (12):

$$p_j = \frac{\sqrt{2E_0 E_k}}{c}.$$

Pro hybnost fotonu platí:

$$p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}.$$

Zákon zachování hybnosti tak můžeme popsat pomocí energií

$$\frac{E_\gamma}{c} = \frac{\sqrt{2E_0 E_k}}{c},$$

$$E_\gamma^2 = 2E_0 E_k.$$

Vyjádríme kinetickou energii jádra:

$$(Q - E_k)^2 = 2E_0 E_k,$$

$$E_k^2 - 2(E_0 + Q)E_k + Q^2 = 0,$$

$$E_k = (E_0 + Q) - \sqrt{(E_0 + Q)^2 - Q^2} = (E_0 + Q) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Q^2}{(E_0 + Q)^2}} \right) \quad (88)$$

Číselně:

$$\begin{aligned} E_k &= (257\,177,986 + 0,434) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{(0,434)^2}{(257\,177,986 + 0,434)^2}} \right) \text{ MeV} = \\ &= 0,366 \cdot 10^{-6} \text{ MeV} = 0,366 \text{ eV}. \end{aligned}$$

Poznámka: Nebuďte překvapeni, že většina kalkulaček zobrazí výsledek jako 0, číslo pod odmocninou totiž vychází 0,999 999 999 997 15, tedy podle těchto kalkulaček 1. Při použití MS Excel však dostaneme výše uvedený výsledek.

Velmi vhodné je tak využít toho, že pod odmocninou je u jedničky velmi malá hodnota, a lze využít Taylorův rozvoj (pro $x \rightarrow 0$ tak $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$):

$$E_k \approx (E_0 + Q) \left(1 - \left(1 - \frac{Q^2}{2(E_0 + Q)^2} \right) \right) = (E_0 + Q) \frac{Q^2}{2(E_0 + Q)^2},$$

$$E_k \approx \frac{Q^2}{2(E_0 + Q)}. \quad (89)$$

Číselně:

$$E_k = \frac{(0,434 \text{ MeV})^2}{2 \cdot (257\,177,986 \text{ MeV} + 0,434 \text{ MeV})} = 0,366 \cdot 10^{-6} \text{ MeV} = 0,366 \text{ eV}.$$

V tomto případě vypadá plně relativistické řešení velmi jednoduše. Dosadíme do zákona zachování hybnosti (87) z relativistických vztahů:

$$E_\gamma^2 = E_k^2 + 2E_0E_k,$$

$$(Q - E_K)^2 = E_k^2 + 2E_0E_k.$$

Odtud vypočítáme kinetickou energii odrazu jádra meitneria, která je rovna

$$E_K = \frac{Q^2}{2(E_0 + Q)}. \quad (90)$$

Porovnáme-li vztahy (90) a (89), vidíme, že nerelativistický postup s využitím Taylorova rozvoje i relativistický výpočet vedou ke stejnému vztahu a tudíž i ke stejné číselné hodnotě energie odrazu jádra. Tato energie je velmi malá, protože jde o těžké jádro a foton s nulovou klidovou hmotností. Rozdíl mezi potřebnou energií pro samoexcitaci a energií fotonu je dvojnásobný. Je to z toho důvodu, že při pohlcení fotonu se absorbujícím jádru musí předat opět energie odrazu. Pořád je však rozdíl velmi malý.

Dostáváme se k tzv. Mössbauerově jevu. Z pohledu klasické fyziky však i takto malý rozdíl stačí k tomu, že vyzářený foton nemůže excitovat stejný vybuzený stav. V kvantové fyzice je však energie excitovaného stavu neurčitá. Velikost této neurčitosti je spojena s neurčitostí určení času, která je v tomto případě spojena se střední dobou života příslušného excitovaného stavu. Střední doba života τ je střední čas existence stavu, v případě radioaktivní přeměny i čas, za který poklesne počet excitovaných stavů na $\frac{1}{e} = 0,3679$ původního počtu. Vztah mezi poločasem rozpadu a střední dobou života je $T_{1/2} = \tau \cdot \ln 2$ (podrobněji viz část 5.6). K ocenění střední doby života excitovaného stavu, která vede k neurčitosti energie umožňující samoexcitaci,

využijeme Heisenbergovu relaci pro vztah mezi neurčitostmi určení času Δt a ΔE energie:

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (91)$$

Neurčitost v určení času je dána dobou života τ , tedy dobou existence stavu. Přírozená nepřesnost definování energie stavu (označuje se jako šířka hladiny Γ tohoto stavu) je tak dána minimální neurčitostí energie při dané době života stavu plynoucí z Heisenbergovy relace neurčitosti. Platí tak:

$$\tau \cdot \Gamma \approx \frac{\hbar}{2}. \quad (92)$$

Pokud bude neurčitost větší nebo srovnatelná s dvojnásobkem energie odrazu, může dojít k samoexcitaci daného vybuzeného stavu. Aby k tomu došlo, musí být doba života excitovaného stavu menší než hodnota plynoucí ze vztahu (92):

$$\tau \leq \frac{\hbar c}{2 \cdot \Gamma c} = \frac{\hbar c}{2 \cdot 2E_K c}. \quad (93)$$

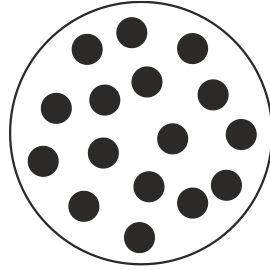
Číselně:

$$\tau \leq \frac{197,3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{2 \cdot 2 \cdot 0,366 \text{ eV} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 0,449 \cdot 10^{-15} \text{ s}.$$

Energie odrazu je v daném případě 0,366 eV, pokud by mělo docházet k samoabsorpci, musela by být doba života daného excitovaného stavu srovnatelná nebo menší než $0,5 \cdot 10^{-15}$ s. V případě, že ukotvíme atom a jádro v krystalové mříži, přenáší se hybnost na celou krystalovou mříž a její obrovskou hmotnost. Energie odrazu je tak zanedbatelná a v tomto případě dochází ke zmíněnému Mössbauerově jevu, tedy k bezdrazové emisi a absorpci i samoexcitaci.

2.5 Pravděpodobnost reakcí – účinný průřez

Pravděpodobnost jaderných reakcí je popsána veličinou, která se označuje jako účinný průřez σ . V případě srážek pevných těles bez vlivu interakcí jde vlastně o geometrický průřez daných těles terče. Plochu terče, na kterou dopadá svazek, zobrazíme jako ohraničený kruh (viz obrázek) a každé jádro jako plné černé kolečko s plochou danou účinným průřezem. Zároveň bude tloušťka terče dostatečně malá, aby pravděpodobnost, že se účinné průřezy budou překrývat nebo dojde k vícenásobnému rozptylu, byla zanedbatelná.



Účinný průřez

V tomto případě bude pravděpodobnost p reakce dána podílem součtu ploch všech plných koleček a celkové plochy kruhu S .

$$p = \frac{N_T \sigma}{S}, \quad (94)$$

kde N_T je počet jader obsažených v terči. Pokud bychom si vyrobili takový terč a dokázali na něj náhodně rovnoměrně po celé ploše kruhu házet šipky, byla by to pravděpodobnost, že se strefíme do některého plného černého kolečka.

Pravděpodobnost reakce můžeme vyjádřit i jako podíl počtu příslušných reakcí (třeba vzniklých jader) N_R ku počtu střel (iontů) svazku N_S , které na terč dopadly.

$$p = \frac{N_R}{N_S}. \quad (95)$$

Porovnáním obou vztahů získáme rovnici

$$\frac{N_T \sigma}{S} = \frac{N_R}{N_S}$$

a odtud vyjádříme účinný průřez

$$\sigma = \frac{N_R S}{N_S N_T} = \frac{N_R}{n_S N_T}, \quad (96)$$

kde n_S je počet částic svazku dopadajících na jednotkovou plochu terče.

Jednotka účinného průřezu je plocha. Poloměr těžkých jader je zhruba 10^{-14} m a jeho geometrický průřez je v řádu 10^{-28} m². Za jednotku účinného průřezu se tak zvolil barn, 1 barn (1 b = 10^{-28} m²). Reálné účinné průřezy jaderných reakcí se však od geometrického účinného průřezu mohou i dramaticky lišit. Velice silně závisí na interakci, která je působí, a také na energii částice svazku. Silná jaderná interakce může vést k účinným průřezům nejen v řádu barnu, ale i jejich desítek, stovek i tisíců. U elektromagnetických interakcí jde o mikrobarny až milibarny. U slabé interakce, kterou interagují neutrina, pak jde o 10^{-19} b. To je důvod, proč se tyto částice tak těžce chytají a jejich detektory musí být tak velké.

U splnutí těžkých jader a produkce supertěžkých prvků jde sice o silnou interakci, ale pravděpodobnost, že vznikne právě příslušné supertěžké jádro, je velmi malá. Účinné průřezy tak klesají přes mikrobarny a nanobarny až k pikobarnům u těch prozatím nejtěžších jader vzdálených od ostrova stability.

V případě produkce supertěžkých jader vzniká napřed splnutím jader projektilu a terče složené jádro, které žije dostatečně dlouho, aby „zapomnělo“, jak vzniklo. To se následně buď zbaví energie vyzařením záření gama, emituje jistý počet neutronů nebo se rozštěpí. Pravděpodobnost vzniku různých izotopů daného supertěžkého prvku je různá. Účinný průřez vzniku konkrétního izotopu je pak součinem účinného průřezu vzniku složeného jádra a pravděpodobnosti, že z něj vznikne daný nuklid.

Příklad 19: Účinný průřez reakce produkce tennesine ($Z = 117$) pomocí srážek plně ionizovaného ^{48}Ca a ^{249}Bk ($A_r = 249,074\ 983$) je zhruba 1,5 pb. Kolik jader tennesine vznikne, jestliže budeme ozařovat čtyři měsíce čistého času svazkem o proudu 1,2 μA terč z berkelia (hustota $\rho = 17\ 480\ \text{kg/m}^3$) o tloušťce takové, že plošná hustota byla $\rho_S = 450\ \mu\text{g/cm}^2$? Určete tloušťku terče.

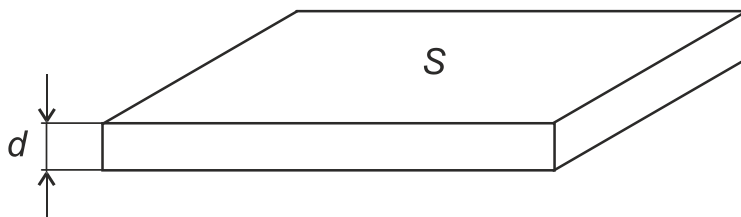
Při popisu terče v jaderných experimentech se často využívá veličina plošná hustota terče ρ_S . Důvodem je, že tloušťka terčových fólií d se měří s horší přesností než plošná hustota. K jejímu stanovení je zapotřebí na analytické váze zvážit fólii, stanovit m a měřítkem či planimetrem změřit plochu fólie S . Obě měření jsou přesnější než mikrometrem měřit přímo tloušťku velmi tenké, často mikronové (tloušťce v řádu mikrometr), terčové fólie. Plošná hustota vrstvy je definována

$$\rho_S = \frac{m}{S}, \quad (97)$$

kde m je hmotnost vrstvy a S je plocha. Pro hustotu vrstvy platí

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{Sd} = \frac{\rho_S}{d},$$

kde V je objem vrstvy a d je tloušťka vrstvy.



Po úpravě

$$d = \frac{\rho_S}{\rho}. \quad (98)$$

Číselně:

$$d = \frac{450 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m}^2}{17\,480 \text{ kg/m}^3} = 0,257 \text{ } \mu\text{m}.$$

Počet jader terče N_T v ozářené ploše S je celková hmotnost m terče podělena hmotností atomu m_a :

$$N_T = \frac{m}{m_a} = \frac{V_T \cdot \rho}{A_r \cdot m_u}. \quad (99)$$

Zároveň využijeme toho, že hmotnost jednoho atomu m_a je možné vyjádřit jako podíl molární hmotnosti M_m (v jednotkách g/mol nebo kg/kmol) a Avogardovy konstanty $N_A = 6,022 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$, která udává počet atomů v jednom kilomolu látky. Podrobněji ve studijním textu Fyzika je kolem nás [9].

$$m_a = A_r \cdot m_u = \frac{M_m}{N_A}. \quad (100)$$

Velikost relativní atomové hmotnosti A_r je stejná jako velikost molární hmotnosti M_m , pouze se liší jednotky. U molární hmotnosti jsou to kg/kmol. Počet atomů v terči tak je:

$$N_T = \frac{V_T \cdot \rho}{M_m} \cdot N_A = \frac{S \cdot d \cdot \rho}{M_m} \cdot N_A. \quad (101)$$

Počet částic dopadajících na terč za časovou jednotku $\frac{dN_s}{dt}$ se označuje jako tok částic a jeho jednotkou je s^{-1} . Vyjádříme jej pomocí elektrického proudu I , který letící ionty vytváří.

$$\frac{dN_s}{dt} = \frac{I}{Q} = \frac{I}{Ze}. \quad (102)$$

Celkový počet jader N_S ve svazku, dopadajících na terč, pak dostaneme s využitím doby ozařování t :

$$N_S = \frac{dN_s}{dt} \cdot t = \frac{I}{Ze} \cdot t. \quad (103)$$

Zároveň platí, že počet částic dopadajících na jednotku plochy je:

$$n_S = \frac{N_S}{S} = \frac{I \cdot t}{Ze \cdot S} \quad (104)$$

Kde S je plocha terče. Počet reakcí dostaneme v případě, že jde o tenký terčík, u kterého se při průchodu svazku terčem nemění ani počet jader svazku a ani jejich energie (přesněji řečeno se mění jen zanedbatelně), ze vztahu (96):

$$\sigma = \frac{N_R}{n_S N_T} \Rightarrow N_R = n_S N_T \sigma. \quad (105)$$

Dosadíme za počet jader terče a celkový plošný počet částic svazku, v tomto případě využijeme pro určení počtu jader terče vztah s Avogardovou konstantou (101):

$$N_R = \frac{I \cdot t}{Ze \cdot S} \cdot \frac{S \cdot d \cdot \rho}{M_m} \cdot N_A \cdot \sigma = \frac{I \cdot t}{Ze} \cdot \frac{d \cdot \rho}{M_m} \cdot N_A \cdot \sigma,$$

celkový počet vyprodukovaných jader tak je:

$$N_j = N_R = \frac{I}{Ze} \cdot t \cdot \frac{d \cdot \rho}{M_m} \cdot N_A \cdot \sigma. \quad (106)$$

Číselné řešení (pro potřebu číselného dosazení ještě převedeme $1,5 \text{ pb} = 1,5 \cdot 10^{-40} \text{ m}^2$). Doba ozařování byla 4 měsíce. Pro zjednodušení budeme počítat, že měsíc má 30 dnů, tj. celkový čas ostřelování za 4 měsíce 10368000 s:

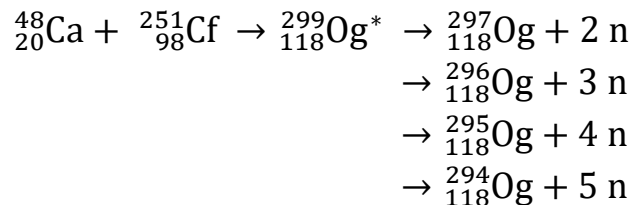
$$N_j = \frac{1,2 \cdot 10^{-6} \text{ A}}{20 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}} \cdot 10\,368\,000 \text{ s} \cdot \frac{0,257 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot 17\,480 \text{ kg/m}^3}{249,075 \text{ kg/kmol}} \cdot 6,022 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1} \cdot 1,5 \text{ pb} = 6,3 \text{ jader} \doteq 6 \text{ jader}.$$

V daném případě se za čtyři měsíce ozařování vyprodukuje zhruba 6 jader tennesine.

Příklad 20: Urychlovač budoucího pracoviště pro studium supertěžkých prvků dokáže poskytnout extrémně intenzivní svazek iontů vápníku ^{48}Ca , až $5 \cdot 10^{14}$ za sekundu těchto jader. Přenesme se do budoucnosti, kdy se nebude produkovat pouze několik jader oganessonů, ale o několik řádů více. Podívejme se na experiment, ve kterém by se produkovaly ozařováním terče z izotopu kalifornia ^{251}Cf ($A_r = 251,079\,587$, $\rho = 15\,100 \text{ kg/m}^3$), při excitační energii 42 MeV, různé izotopy oganessonů pro chemickou analýzu tohoto inertního plynu. Využil by se terč o tloušťce $0,4 \text{ }\mu\text{m}$ a ozařování probíhalo 5 měsíců čistého času. Jaké by byly účinné průřezy reakcí s emisí 2, 3, 4 a 5 nukleonů, jestliže pro excitační energii 42 MeV by vzniklo jader izotopu

^{297}Og , ^{296}Og , ^{295}Og a ^{294}Og postupně 645, 1891, 2807 a 470? Jaký by byl účinný průřez vzniku složeného jádra ^{299}Og spojením jader ^{48}Ca a ^{251}Cf a pravděpodobnosti emisí různého počtu neutronů, jestliže pravděpodobnost jiných reakcí by byla vůči popsaným zanedbatelná? Popište tyto reakce.

Popisované reakce probíhají následujícím způsobem:



Počet jader terče v ozářené ploše S tentokrát určíme pomocí hmotnosti atomu a jednotkové hmotnosti ze vztahu (99):

$$N_T = \frac{V_T \cdot \rho}{A_r \cdot m_u} = \frac{S \cdot d \cdot \rho}{A_r \cdot m_u}.$$

Počet jader ve svazku N_S dopadajících na terč vyjádříme pomocí počtu jader ve svazku za časovou jednotku $\frac{dN_S}{dt}$:

$$N_S = \frac{dN_S}{dt} \cdot t.$$

Zároveň platí, že počet částic dopadajících na jednotku plochy je:

$$n_S = \frac{N_S}{S} = \frac{\frac{dN_S}{dt} \cdot t}{S},$$

kde S je plocha terče. Účinný průřez dostaneme v případě, že jde o tenký terčík, u kterého se při průchodu svazku terčem nemění ani počet jader svazku a ani jejich energie (přesněji řečeno se mění jen zanedbatelně) ze vztahu (96):

$$\sigma = \frac{N_R}{n_S N_T}.$$

Dosadíme za počet jader terče a počet částic, který dopadl na jednotku plochy:

$$\sigma = \frac{N_R}{\frac{\frac{dN_S}{dt} \cdot t}{S} \cdot \frac{S \cdot d \cdot \rho}{A_r \cdot m_u}} = \frac{N_R \cdot A_r \cdot m_u}{\frac{dN_S}{dt} \cdot t \cdot d \cdot \rho}.$$

Hmotnostní jednotku vyjádříme v energetických jednotkách:

$$\sigma = \frac{N_R \cdot A_r \cdot m_u c^2}{\frac{dN_S}{dt} \cdot t \cdot d \cdot \rho \cdot c^2}. \quad (107)$$

Číselně:

$$\begin{aligned}\sigma(^{297}\text{Og}) &= \\ &= \frac{645 \cdot 251,079\,587 \cdot 931,494\,095 \cdot 1,602 \cdot 10^{-13} \text{ J}}{5 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1} \cdot (5 \cdot 30 \cdot 24 \cdot 3\,600 \text{ s}) \cdot 0,4 \text{ }\mu\text{m} \cdot 15\,100 \text{ kg/m}^3 (3 \cdot 10^8)^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}}.\end{aligned}$$

$$\sigma(^{297}\text{Og}) = 645 \cdot 1,064 \cdot 10^{-44} \text{ m}^2 = 6,87 \cdot 10^{-14} \text{ b} = 0,068\,6 \text{ pb.}$$

$$\sigma(^{296}\text{Og}) = 1891 \cdot 1,064 \cdot 10^{-44} \text{ m}^2 = 20,13 \cdot 10^{-14} \text{ b} = 0,201\,2 \text{ pb.}$$

$$\sigma(^{295}\text{Og}) = 2807 \cdot 1,064 \cdot 10^{-44} \text{ m}^2 = 29,89 \cdot 10^{-14} \text{ b} = 0,298\,7 \text{ pb.}$$

$$\sigma(^{294}\text{Og}) = 470 \cdot 1,064 \cdot 10^{-44} \text{ m}^2 = 5,00 \cdot 10^{-14} \text{ b} = 0,050\,0 \text{ pb.}$$

V případě účinných průřezů jde o nezávislé pravděpodobnosti, takže celková pravděpodobnost je součtem dílčích pravděpodobností. Celkový účinný průřez je tak součtem dílčích účinných průřezů:

$$\sigma(\text{Og}) = \sigma(^{297}\text{Og}) + \sigma(^{296}\text{Og}) + \sigma(^{295}\text{Og}) + \sigma(^{294}\text{Og}).$$

Číselně:

$$\sigma(\text{Og}) = 0,068\,6 \text{ pb} + 0,201\,2 \text{ pb} + 0,298\,7 \text{ pb} + 0,050\,0 \text{ pb} = 0,618\,5 \text{ pb.}$$

Pravděpodobnosti emise různého počtu neutronů ze složeného jádra ^{299}Og jsou pak dány podílem účinného průřezu vzniku daného jádra a celkového účinného průřezu vzniku složeného jádra (stejný výsledek dostaneme i z podílu počtu produkovaných jader daného nuklidu a celkového počtu vytvořených atomů oganessonů):

$$P(^A\text{Og}) = \frac{\sigma(^A\text{Og})}{\sigma(\text{Og})} = \frac{N_R(^A\text{Og})}{N_R(\text{Og})}.$$

Číselně:

$$P(^{297}\text{Og}) = \frac{0,068\,7 \text{ pb}}{0,618\,9 \text{ pb}} = 0,111 = 11,1 \%,$$

$$P(^{296}\text{Og}) = \frac{0,201\,3 \text{ pb}}{0,618\,9 \text{ pb}} = 0,325 = 32,5 \%,$$

$$P(^{295}\text{Og}) = \frac{0,298\,9 \text{ pb}}{0,618\,9 \text{ pb}} = 0,483 = 48,3 \%,$$

$$P(^{294}\text{Og}) = \frac{0,050\,0 \text{ pb}}{0,618\,9 \text{ pb}} = 0,081 = 8,1 \%.$$

Účinné průřezy produkce různých izotopů oganessonů jsou pro případ reakce ^{48}Ca a ^{251}Cf v případě excitační energie 42 MeV $\sigma(^{297}\text{Og}) = 0,068\,6 \text{ pb}$, $\sigma(^{296}\text{Og}) = 0,2012 \text{ pb}$, $\sigma(^{295}\text{Og}) = 0,298\,7 \text{ pb}$ a $\sigma(^{294}\text{Og}) = 0,050\,0 \text{ pb}$. Účinný průřez vzniku složeného jádra $\sigma(\text{Og}) = 0,618\,5 \text{ pb}$, emise dvou neutronů má pravděpodobnost 11,1 %, emise tří neutronů 32,5 %, čtyř neutronů 48,3 % a pěti neutronů 8,1 %.

2.6 Nestabilita jader, radioaktivita a rozpadový zákon

Jádra mohou být stabilní, ale daleko více je jich nestabilních. Kvantová fyzika je nutná i pro popis průběhu přeměny radioaktivních jader. U jednotlivého konkrétního nestabilního jádra nemůžeme říci, kdy se rozpadne. Známe jen pravděpodobnost, že se dané jádro rozpadne za časovou jednotku. Tato veličina, která je konstantní a nezávisí na předchozí době existence nestabilního jádra, se označuje jako rozpadová konstanta λ . Jednotkou této veličiny je $[\lambda] = \text{s}^{-1}$. Převrácená hodnota rozpadové konstanty je střední doba života $\tau = \frac{1}{\lambda}$.

Důležitou veličinou, která popisuje chování radioaktivních látek je aktivita A , která určuje počet přeměn za časovou jednotku $A = -\frac{dN}{dt}$. Jednotkou této veličiny je becquerel $[A] = \text{Bq} = \text{s}^{-1}$. Tato jednotka, která znamená jednu přeměnu jádra za sekundu, je poměrně malá. V praxi se tak u využívaných radioaktivních zdrojů, třeba pro kalibraci detektorů či v medicíně, setkáváme s jejími násobky, tedy kilobecquerely [kBq], megabecquerely [MBq] a gigabecquerely [GBq].

Pokud známe počet radioaktivních jader N ve vzorku, můžeme spočítat aktivitu tohoto vzorku. Počet jader, které se rozpadnou za časovou jednotku, je totiž součinem pravděpodobnosti rozpadu jednoho jádra za časovou jednotku a počtu jader:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N. \quad (108)$$

Podívejme se, jak se bude měnit počet jader s časem. Musíme pracovat s co nejkratším časovým intervalem dt . Za tento limitní časový okamžik je také minimální změna počtu jader dN , která je zanedbatelná vůči celkovému počtu jader. Počet přeměněných jader za časovou jednotku je dán součinem rozpadové konstanty a počtu jader. Celkový počet jader přeměněných za časový okamžik pak dostaneme vynásobením časovým intervalem dt :

$$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt, \quad (109)$$

kde záporné znaménko vyjadřuje to, že jde o úbytek počtu jader.

Diferenciální rovnici řešíme separací proměnných:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda \cdot dt \Rightarrow \int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt.$$

Kde N_0 je počet jader v čase $t = 0$ a N v čase t . Provedeme integraci:

$$\ln N - \ln N_0 = -\lambda t \Rightarrow \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t.$$

A tedy:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (110)$$

Pokles počtu jader tak probíhá podle exponenciální zákonitosti. Pokud uběhne čas rovný střední době života $t = \tau = \frac{1}{\lambda}$ poklesne počet jader na $\frac{1}{e} = 0,3679$ původního stavu.

Když vezmeme v úvahu vztah mezi aktivitou a počtem jader, platí stejná zákonitost i pro aktivitu:

$$A = A_0 e^{-\lambda t}. \quad (111)$$

Veličinou, která může charakterizovat rozpad daného radionuklidu, tak může být doba, za kterou se rozpadne polovina jader vzorku, tzv. poločas rozpadu $T_{1/2}$. Pro ni platí:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}.$$

Odtud:

$$\ln \frac{1}{2} = -\lambda T_{1/2} \Rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (112)$$

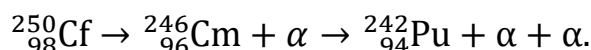
Pokles aktivity v čase pak můžeme popsat i pomocí poločasu rozpadu:

$$A = A_0 e^{-\frac{t \cdot \ln 2}{T_{1/2}}} = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}. \quad (113)$$

Stačí tak jen několik poločasů rozpadu a aktivita dramaticky poklesne a dostává se pod hranici citlivosti dostupných měřících technik.

Příklad 21: Terč z kalifornia ^{250}Cf ($A_r = 250,076\,404\,561$) s poločasem rozpadu 13,08 let má hmotnost 4,2 mg. Jaká je jeho aktivita? Rozpadá se rozpadem alfa na curium ^{246}Cm ($A_r = 246,067\,222\,082$) s poločasem rozpadu 4 706 let. Napište průběh rozpadu. Jaká bude aktivita kalifornia po 40 letech? Jaká bude aktivita curia po 40 letech, jestliže po výrobě terče v něm žádné curium nebylo? Jaký bude tepelný výkon na začátku a po zmíněných 40 letech? Kdy bude aktivita curia maximální a jaká?

Průběh rozpadu:



Počet radioaktivních jader terče určíme z jeho hmotnosti m a molární hmotnosti M_m s využitím Avogardovy konstanty N_A s využitím vztahu (101):

$$N(\text{Cf}) = \frac{m \cdot N_A}{M_m}$$

Aktivita terče pak na počátku byla:

$$A(\text{Cf}) = \lambda_{\text{Cf}} N(\text{Cf}) = \frac{\ln 2}{T_{1/2}(\text{Cf})} \cdot \frac{m \cdot N_A}{M_m}$$

Číselně:

$$\begin{aligned} A(\text{Cf}) &= \frac{\ln 2}{13,08 \text{ rok}} \cdot \frac{4,2 \text{ mg} \cdot 6,022 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}}{250,076 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}} = \\ &= \frac{\ln 2}{13,08 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}} \cdot \frac{4,2 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot 6,022 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}}{250,076 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}} = \\ &= \frac{\ln 2}{4,125 \cdot 10^8 \text{ s}} \cdot \frac{4,2 \cdot 10^{-6} \cdot 6,022 \cdot 10^{26}}{2,50076 \cdot 10^2} = 1,70 \cdot 10^{10} \text{ Bq} = 17,0 \text{ GBq}. \end{aligned}$$

Aktivitu po době t získáme ze vztahu (113), číselně:

$$A = 17,0 \text{ GBq} \cdot e^{-\frac{40 \cdot \ln 2}{13,08}} = 2,04 \text{ GBq}.$$

Podívejme se na uvolněnou energii:

$$\begin{aligned} E_0(^{250}\text{Cf}) &= 250,076404561 \cdot 931,494095 \text{ MeV} - 98 \cdot 0,510999 \text{ MeV} = \\ &= 232894,616 \text{ MeV}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_0(^{246}\text{Cm}) &= 246,067222082 \cdot 931,494095 \text{ MeV} - 96 \cdot 0,510999 \text{ MeV} = \\ &= 229161,108 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Energie rozpadu alfa je v tomto případě:

$$Q = E_0(^{250}\text{Cf}) - (E_0(^{246}\text{Cm}) + E_0(^4\text{He})).$$

Číselně:

$$Q = 232894,616 \text{ MeV} - (229161,108 \text{ MeV} + 3727,379 \text{ MeV}) = 6,129 \text{ MeV}.$$

Tepelný výkon na počátku je:

$$P = A \cdot Q. \quad (114)$$

Číselně:

$$P = 1,70 \cdot 10^{10} \text{ Bq} \cdot 6,129 \cdot 10^6 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 0,0167 \text{ W}.$$

Po čtyřiceti letech lze pořád ještě zanedbat aktivitu rozpadu curia, v té době bude výkon:

$$P = 2,04 \cdot 10^9 \text{ Bq} \cdot 6,129 \cdot 10^6 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 0,0020 \text{ W}.$$

Radionuklid, který je druhý v rozpadové řadě, se nejen rozpadá a ubývá, ale také přibývá rozpadem radionuklidu předchozího v řadě. Diferenciální rovnice, která popisuje jeho rozpad, pak vypadá takto:

$$dN_2 = -\lambda_2 \cdot N_2 \cdot dt + \lambda_1 \cdot N_1 \cdot dt \Rightarrow \frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1. \quad (115)$$

Řešení lze popsat ve tvaru:

$$N_2 = C_{21}e^{-\lambda_1 t} + C_{22}e^{-\lambda_2 t}. \quad (116)$$

Pro určení konstant dosadíme do diferenciální rovnice za N_1 a N_2 (na levé straně rovnice je tak derivace N_2 podle času):

$$\begin{aligned} -\lambda_1 C_{21}e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 C_{22}e^{-\lambda_2 t} &= -\lambda_2(C_{21}e^{-\lambda_1 t} + C_{22}e^{-\lambda_2 t}) + \lambda_1 N_{01}e^{-\lambda_1 t}, \\ -\lambda_1 C_{21}e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 C_{22}e^{-\lambda_2 t} &= -\lambda_2 C_{21}e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 C_{22}e^{-\lambda_2 t} + \lambda_1 N_{01}e^{-\lambda_1 t}, \\ 0 &= \lambda_1 C_{21}e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 C_{21}e^{-\lambda_1 t} + \lambda_1 N_{01}e^{-\lambda_1 t} = (\lambda_1 C_{21} - \lambda_2 C_{21} + \lambda_1 N_{01})e^{-\lambda_1 t}, \\ 0 &= \lambda_1 C_{21} - \lambda_2 C_{21} + \lambda_1 N_{01} \Rightarrow C_{21} = \frac{\lambda_1 N_{01}}{(\lambda_2 - \lambda_1)}. \end{aligned} \quad (117)$$

Konstantu C_{22} získáme z počátečních podmínek, tedy z toho, kolik bylo jader curia v čase $t = 0$, $N_2(t) = N_{20}$:

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{\lambda_1 N_{01}}{(\lambda_2 - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} + C_{22} e^{-\lambda_2 t}, \\ N_{20} &= \frac{\lambda_1 N_{01}}{(\lambda_2 - \lambda_1)} + C_{22} \Rightarrow C_{22} = \left(N_{20} - \frac{\lambda_1 N_{01}}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \right), \end{aligned} \quad (118)$$

$$N_2 = \frac{\lambda_1 N_{01}}{(\lambda_2 - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} + \left(N_{20} - \frac{\lambda_1 N_{01}}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \right) e^{-\lambda_2 t}. \quad (119)$$

V našem případě je $N_{20} = 0$ a tedy:

$$N_2 = \frac{\lambda_1 N_{01}}{(\lambda_2 - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1 N_{01}}{(\lambda_2 - \lambda_1)} e^{-\lambda_2 t} = \frac{\lambda_1 N_{01}}{(\lambda_2 - \lambda_1)} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \quad (120)$$

Poměr mezi množstvím produkováných jader obou radionuklidů je:

$$\begin{aligned} \frac{N_2}{N_1} &= \frac{\frac{\lambda_1 N_{01}}{(\lambda_2 - \lambda_1)} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})}{N_{01} e^{-\lambda_1 t}} = \frac{\lambda_1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) e^{+\lambda_1 t} = \\ &= \frac{\lambda_1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} (1 - e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}), \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

Číselně:

$$\lambda_1 = \frac{\ln 2}{13,08 \text{ rok}} = 0,05299 \text{ rok}^{-1},$$

$$\lambda_2 = \frac{\ln 2}{4706 \text{ rok}} = 0,0001473 \text{ rok}^{-1}.$$

Číselně (v čase $t = 40$ let):

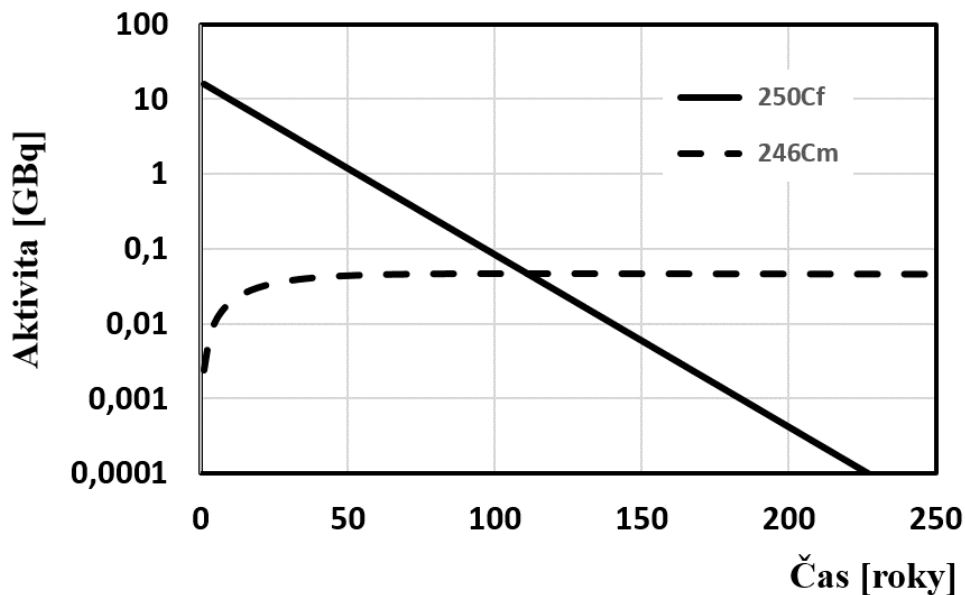
$$\begin{aligned} \frac{N_2}{N_1} &= \frac{0,05299 \text{ rok}^{-1}}{(0,0001473 \text{ rok}^{-1} - 0,05299 \text{ rok}^{-1})} (1 - e^{(0,05299 \text{ rok}^{-1} - 0,0001473 \text{ rok}^{-1}) \cdot 40 \text{ rok}}) = \\ &= -1,002788 \cdot (-7,2789) = 7,2992. \end{aligned}$$

Poměr aktivit bude:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\lambda_2 N_2}{\lambda_1 N_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\lambda_1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} (1 - e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}) = \frac{\lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)} (1 - e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}).$$

Číselně:

$$\begin{aligned} \frac{A_2}{A_1} &= \frac{0,0001473 \text{ rok}^{-1}}{(0,0001473 \text{ rok}^{-1} - 0,05299 \text{ rok}^{-1})} (1 - e^{(0,05299 \text{ rok}^{-1} - 0,0001473 \text{ rok}^{-1}) \cdot 40 \text{ rok}}) = \\ &= -0,0027875 \cdot -7,2789 = 0,020290. \end{aligned}$$



Průběh změn aktivity kalifornia ^{250}Cf a curia ^{246}Cm v závislosti na době, která uplynula od produkce terče z kalifornia. Využívá se logaritmické měřítko na ose y. Průběh změn aktivity kalifornia je exponenciální a v logaritmickém měřítku tak má lineární průběh. Curium má velmi dlouhý poločas rozpadu a v našem grafu je tak vidět jen rychlý nárůst jeho aktivity důsledku produkce curia v rozpadu kalifornia. Teprve v delším časovém měřítku by se začala projevovat exponenciální závislost rozpadu curia.

Aktivita curia ^{246}Cm po 40 letech bude:

$$A_2 = \frac{A_2}{A_1} \cdot A_1 = 0,020\,290 \cdot 2,04 \text{ GBq} = 0,041\,4 \text{ GBq} = 41,4 \text{ MBq}.$$

Maximum je extrém funkce. Pro něj platí, že derivace je nula:

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{\lambda_1 N_{01}}{(\lambda_2 - \lambda_1)} (-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}) = 0.$$

Odtud:

$$-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} = 0,$$

$$\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \Rightarrow \frac{e^{-\lambda_2 t}}{e^{-\lambda_1 t}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \Rightarrow e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)t = \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \Rightarrow t = \frac{\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}{(\lambda_1 - \lambda_2)}.$$

Číselně:

$$t = \frac{\ln \frac{0,0529\,9 \text{ rok}^{-1}}{0,000\,147\,3 \text{ rok}^{-1}}}{(0,052\,99 \text{ rok}^{-1} - 0,000\,147\,3 \text{ rok}^{-1})} = 111,4 \text{ rok}.$$

Aktivita curia bude v té době:

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{\lambda_2 \lambda_1 N_{01}}{(\lambda_2 - \lambda_1)} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) = \frac{\lambda_2 \lambda_1 \frac{A_{01}}{\lambda_1}}{(\lambda_2 - \lambda_1)} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) = \\ &= \frac{\lambda_2 A_{01}}{(\lambda_2 - \lambda_1)} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \end{aligned}$$

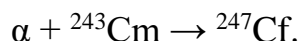
Číselně:

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{0,0001473 \text{ rok}^{-1} \cdot 1,70 \cdot 10^{10} \text{ Bq}}{(0,0001473 \text{ rok}^{-1} - 0,05299 \text{ rok}^{-1})} (e^{-0,05299 \text{ rok}^{-1} \cdot 111,4 \text{ rok}} - e^{-0,0001473 \text{ rok}^{-1} \cdot 111,4 \text{ rok}}) = \\ &= 0,0032\,2 \cdot 10^{10} \text{ Bq} = 46,5 \text{ MBq}. \end{aligned}$$

Aktivita kalifornia bude na počátku 17,0 GBq, po čtyřiceti letech to bude 2,04 GBq. Aktivita curia bude po čtyřiceti letech 41,4 MBq. Tepelný výkon terče na začátku bude 16,7 mW a po čtyřiceti letech pak 2,0 mW. Maximální aktivita curia bude za 111,4 let a její hodnota bude 46,5 MBq.

Příklad 22: Pomocí ozařování curia ^{243}Cm ($T_{1/2} = 29,1$ let) částicemi alfa z urychlovače se produkuje kalifornium ^{247}Cf ($T_{1/2} = 3,11$ h). Napište rovnici reakce. Rychlost produkce aktivity je 20 Bq/min. Jaká aktivita se nagenereuje za 5, 10 a 15 hodin ozařování? Jaká je maximálně možná nagenеровaná aktivita.

Jde o reakci



Vzhledem k poměru mezi poločasem rozpadu jader terče a produkovaného radionuklidu, lze rozpad curia během ozařování zanedbat. Vztah mezi rychlostí produkce aktivity P_A a rychlostí produkce jader P_N je stejný jako mezi aktivitou a počtem jader:

$$P_A = \lambda P_N \Rightarrow P_N = \frac{P_A}{\lambda}. \quad (121)$$

Změna počtu radioaktivních jader je dána přírůstkem z ozařování a úbytkem z rozpadu:

$$dN = (-\lambda N + P_N) \cdot dt. \quad (122)$$

Řešíme příslušnou diferenciální rovnici:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{\left(N - \frac{P_N}{\lambda}\right)} &= -\lambda \cdot dt, \\ \int_0^N \frac{dN}{\left(N - \frac{P_N}{\lambda}\right)} &= \int_0^t -\lambda dt, \\ \left[\ln\left(N - \frac{P_N}{\lambda}\right)\right]_0^N &= [-\lambda t]_0^t, \\ \ln\left(N - \frac{P_N}{\lambda}\right) - \ln\left(-\frac{P_N}{\lambda}\right) &= t \Rightarrow \ln \frac{\left(N - \frac{P_N}{\lambda}\right)}{-\frac{P_N}{\lambda}} = -\lambda t, \\ \frac{\left(N - \frac{P_N}{\lambda}\right)}{-\frac{P_N}{\lambda}} &= e^{-\lambda t} \Rightarrow N = \frac{P_N}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}). \end{aligned} \quad (123)$$

Dosadíme za rychlost produkce jader P_N ze známé rychlosti produkce aktivity P_A (využijeme i vztah (108) $A = \lambda N$):

$$N = \frac{P_A}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \Rightarrow A = \frac{P_A}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}),$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}},$$

$$A = \frac{P_A}{\frac{\ln 2}{T_{1/2}}} \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t} \right) = \frac{P_A \cdot T_{1/2}}{\ln 2} \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t} \right). \quad (124)$$

Číselně:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{20 \text{ Bq/min} \cdot 3,11 \text{ h}}{\ln 2} \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{3,11 \text{ h}} 5 \text{ h}} \right) = \\ &= \frac{20 \text{ Bq} \cdot 3,11 \cdot 60}{\ln 2} \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{3,11 \text{ h}} 5 \text{ h}} \right) = 3 \, 617 \text{ Bq} = 3,617 \text{ kBq}, \\ A_2 &= \frac{20 \text{ Bq/min} \cdot 3,11 \cdot 60 \text{ min}}{\ln 2} \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{3,11 \text{ h}} 10 \text{ h}} \right) = 4 \, 804 \text{ Bq} = 4,804 \text{ kBq}, \\ A_3 &= \frac{20 \text{ Bq/min} \cdot 3,11 \cdot 60 \text{ min}}{\ln 2} \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{3,11 \text{ h}} 15 \text{ h}} \right) = 5 \, 194 \text{ Bq} = 5,194 \text{ kBq}. \end{aligned}$$

Maximální dosažitelnou hodnotu aktivity získáme z limitního řešení rovnice (124):

$$A = \frac{P_A \cdot T_{1/2}}{\ln 2} \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \infty} \right) = \frac{P_A \cdot T_{1/2}}{\ln 2} (1 - 0) = \frac{P_A \cdot T_{1/2}}{\ln 2}.$$

Ovšem tento výsledek můžeme získat už z rovnice (122):

$$dN = (-\lambda N + P) \cdot dt \Rightarrow \frac{dN}{dt} = (-\lambda N + P).$$

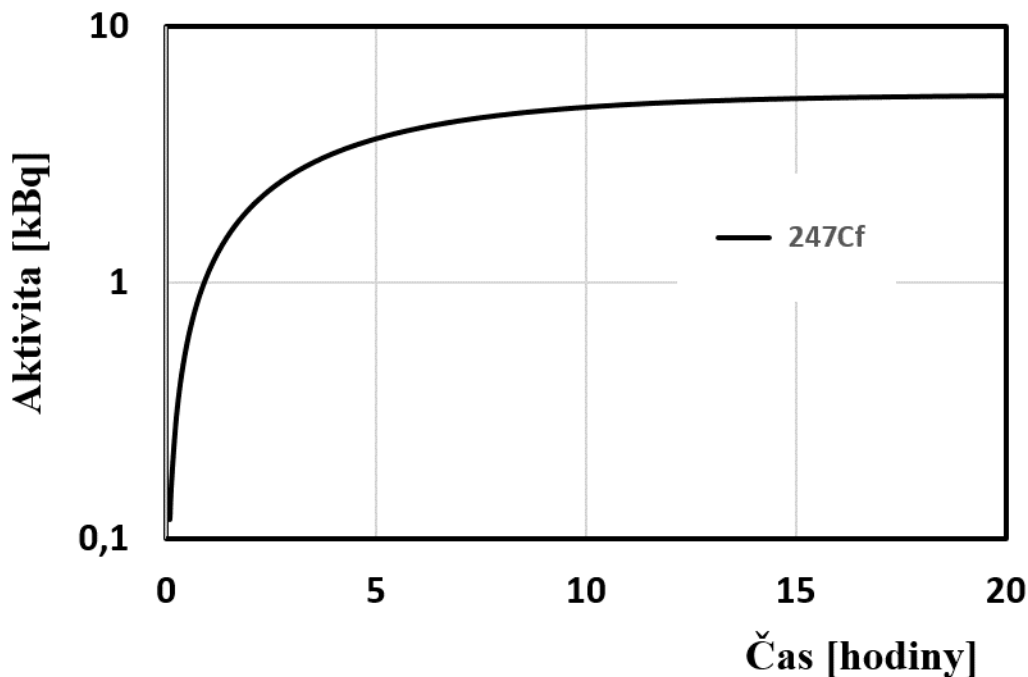
Když se podíváme na situaci, kdy se už počet jader nebude měnit a tedy $\frac{dN}{dt} = 0$, pak:

$$0 = -\lambda N + P \Rightarrow \lambda N = P \Rightarrow A = \frac{P_A \cdot T_{1/2}}{\ln 2}.$$

Číselně:

$$A = \frac{20 \text{ Bq/min} \cdot 3,11 \cdot 60 \text{ min}}{\ln 2} = 5 \, 384 \text{ Bq} = 5,384 \text{ kBq}.$$

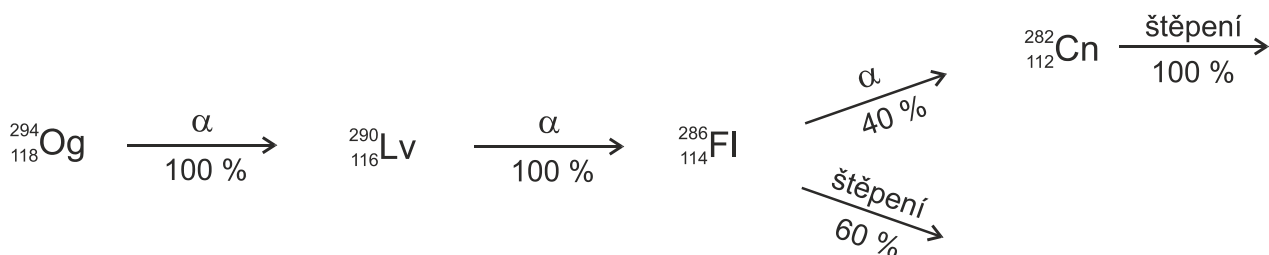
Aktivita kalifornia 247 bude po 5, 10 a 15 hodinách ozařování postupně přibližně 3,6 kBq, 4,8 kBq a 5,2 kBq. Maximálně možná naprodukováná aktivita je 5,4 kBq.



Produkce izotopu kalifornia ^{247}Cf ozařováním konstantním svazkem. Je vidět, že postupně dojde k saturaci a nemá cenu produkci prodlužovat přes tři poločasy rozpadu (v našem případě okolo deseti hodin). Pak už se získaná aktivita zvyšuje minimálně.

Příklad 23: Při dlouhodobém experimentu se pozorovalo 7 jader izotopu ^{294}Og , u kterých se podařilo zaznamenat celou rozpadovou sekvenci, která jde přes ^{290}Lv , ^{286}Fl , a někdy až k ^{282}Cn , přičemž jádra ^{294}Og a ^{290}Lv se rozpadají čistě rozpadem alfa, ^{286}Fl rozpadem alfa ze 40 % a samovolným štěpením z 60 %, ^{282}Cn pak ze 100 % štěpením. Jaká je pravděpodobnost, že jsme zaznamenali 4 štěpení ^{282}Cn a 3 štěpení ^{286}Fl .

Popsané přeměny lze znázornit následujícím schématem:



Flerovium Fl se přemění přeměnou alfa s pravděpodobností $p_1 = 0,4$ na kopernicium Cn, které se pak rozpadne štěpením. Tato přeměna z pozorovaných 7 případů má dle zadání nastat čtyřikrát. Přeměnou alfa se flerovium přímo rozpadne s pravdě-

podobností $p_2 = 1 - p_1 = 0,60$ a tato přeměna má nastat ve zbývajících případech, tedy třikrát. Přeměnu 7 jader flerovia můžeme chápat jako sedm náhodných nezávislých pokusů se dvěma možnými výsledky. Příznivý výsledek má nastat 4krát. Matematicky jde o kombinace. Počet kombinací je dán vztahem:

$$C_4(7) = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4! \cdot (7-4)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35,$$

$$p = C_4(7) \cdot p_1^4 \cdot p_2^3.$$

Pro výpočet pravděpodobnosti p můžeme se stejným výsledkem použít Bernoulliho schéma. Číselně:

$$p = \binom{7}{4} \cdot p_1^4 \cdot p_2^3 = 35 \cdot 0,4^4 \cdot 0,6^3 = 0,194, \text{ t.j. } 19,4 \text{ \%}.$$

V případě detekce sedmi jader oganessonů 294 má pravděpodobnost zaznamenání 4 štěpení ^{282}Cn a 3 štěpení ^{286}Fl hodnotu 19,4 %.

2.7 Elektronový obal atomu určuje jeho chemické vlastnosti

Na závěr se ještě podívejme na elektronový obal supertěžkých atomů a vlastnosti jeho nejnvnitřnějšího elektronu. S využitím jednoduchého Bohrova modelu atomu, který je podrobně popsán ve studijním textu Atomy [10], si popíšeme vodíku podobné ionty různých těžkých atomů. Tedy situaci, kdy iontu zůstal pouze jeden elektron.

Příklad 24: Srovnajte poloměry trajektorií elektronů u vodíku a iontů železa a oganessonů s jedním elektronem a rozměry těchto jader v aproximaci Bohrova modelu atomu. Určete rychlost elektronu, zda je relativistický, či nerelativistický. U kterého atomu už je třeba začít uvažovat vliv relativity? Jak se změní hmotnost elektronu?

Předpokládáme Bohrovův model atomu. Zde platí, že elektrony jsou na stabilních kruhových trajektoriích v případě, že jejich obvod je celočíselným násobkem de Broglieho vlnové délky elektronu.

$$n\lambda_n = 2\pi R_n. \quad (125)$$

Vyjádříme vlnovou délku pomocí hybnosti pomocí vztahu (7):

$$n \frac{h}{p_n} = 2\pi R_n \Rightarrow R_n = \frac{n \cdot h}{p_n}. \quad (126)$$

V atomu působí dostředivá síla vytvořená elektrickým polem jádra:

$$m_e \frac{v_n^2}{R_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{R_n^2}. \quad (127)$$

Vztah vynásobíme poloměrem R_n :

$$p_n v_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{R_n} \Rightarrow p_n v_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2 Z \hbar c}{\hbar c R_n} = \alpha \frac{Z \hbar c}{R_n}.$$

Dosadíme za poloměr:

$$p_n v_n = \alpha \frac{Z \hbar c}{\frac{n \cdot \hbar}{p_n}} \Rightarrow v_n = \alpha \frac{Z \hbar c}{n \cdot \hbar} \Rightarrow \frac{v_n}{c} = \alpha \frac{Z}{n}. \quad (128)$$

Číselně:

$$Z = 1 \Rightarrow \frac{v_n}{c} = \frac{1}{137} \frac{1}{n} = 0,00730 \cdot \frac{1}{n},$$

$$Z = 26 \Rightarrow \frac{v_n}{c} = \frac{1}{137} \frac{26}{n} = 0,190 \cdot \frac{1}{n},$$

$$Z = 118 \Rightarrow \frac{v_n}{c} = \frac{1}{137} \frac{118}{n} = 0,861 \cdot \frac{1}{n}.$$

Určíme, pro jaké Z bude rychlost nejvnitřnějšího elektronu $0,14 c$ (nárůst hmotnosti 1 %):

$$Z = \frac{v_1}{\alpha c},$$

Číselně:

$$Z = \frac{0,14}{\frac{1}{137}} = 19.$$

Pro vnitřní elektrony začnou mít smysl relativistické korekce už od $Z = 19$, což je draslík. Supertěžké prvky už mají vnitřní elektrony s rychlostí velmi blízkou rychlosti světla. Zde už je hranice pro jakékoliv využití Bohrova modelu, ale i při využití realistického kvantového popisu se objevují otázky hranice existence a stability atomového obalu.

Kinetická energie je:

$$E_{kn} = E - E_0 = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_n}{c}\right)^2}} - E_0 = E_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_n}{c}\right)^2}} - 1 \right). \quad (129)$$

Číselně:

$$Z = 1 \Rightarrow E_{kn} = 0,511 \text{ MeV} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(0,00730 \cdot \frac{1}{n}\right)^2}} - 1 \right) \Rightarrow E_{k1} = 13,61 \text{ eV},$$

$$Z = 26 \Rightarrow E_{kn} = 0,511 \text{ MeV} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(0,190 \cdot \frac{1}{n}\right)^2}} - 1 \right) \Rightarrow E_{k1} = 9,48 \text{ keV},$$

$$Z = 118 \Rightarrow E_{kn} = 0,511 \text{ MeV} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(0,861 \cdot \frac{1}{n}\right)^2}} - 1 \right) \Rightarrow E_{k1} = 0,494 \text{ MeV}.$$

Poloměr je:

$$R_n = \frac{n \cdot \hbar}{p_n} = \frac{n \cdot \hbar c}{p_n c} = \frac{n \cdot \hbar c}{\sqrt{2E_{kn}E_0 + E_{kn}^2}}.$$

Číselně pro nejvnitřnější dráhu ($n = 1$):

$$R_n(\text{H}) = \frac{197,3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{\sqrt{2 \cdot 13,61 \text{ eV} \cdot 510\,999 \text{ eV} + (13,61 \text{ eV})^2}} = 0,053 \text{ nm} = 53 \text{ pm},$$

$$R_n(\text{Fe}) = \frac{197,3 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{\sqrt{2 \cdot 9480 \text{ eV} \cdot 510\,999 \text{ eV} + (9480 \text{ eV})^2}} = 0,0020 \text{ nm} = 2,0 \text{ pm},$$

$$R_n(\text{Og}) = \frac{197,3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{\sqrt{2 \cdot 0,494 \text{ MeV} \cdot 0,511 \text{ MeV} + (0,494 \text{ MeV})^2}} = 228 \text{ fm} = 0,23 \text{ pm}.$$

Bohrův model atomu je velice zjednodušený a jeho výsledky je třeba brát s velikou rezervou. Ukazuje však, že vnitřní elektrony v supertěžkých prvcích jsou extrémně relativistické a dostávají se velmi blízko k jádru. A to může velice silně ovlivnit jejich chování.

3 Neřešené příklady na závěr

Příklad 25: Vypočítejte rychlosti ($\beta = v/c$) hybnosti, poměry mezi relativistickou a klidovou hmotností a de Broglieho vlnovou délkou protonů urychlených na urychlovačích v laboratoři CERN, nejdříve na protonovém synchrotronu PS ($E_k = 28 \text{ GeV}$), potom na LHC ($E_k = 7 \text{ TeV}$). [$v(28 \text{ GeV}) = 0,999\,474\,2c$ a $v(7 \text{ TeV}) = 0,999\,999\,991\,0c$, $\frac{m}{m_0}(28 \text{ GeV}) = 30,9$ a $\frac{m}{m_0}(7 \text{ TeV}) = 7\,464$, $p(28 \text{ GeV}) = 28,9 \text{ GeV}/c$ a $p(7 \text{ TeV}) = 7\,000 \text{ GeV}/c$, $\lambda(28 \text{ GeV}) = 0,43 \text{ fm}$ a $\lambda(7 \text{ TeV}) = 0,18 \cdot 10^{-3} \text{ fm}$]

Příklad 26: Pojmeme zrcadlová jádra se označují dvojice jader, u kterých platí, že jedno má stejný počet protonů jako druhé neutronů a naopak. Jejich nukleonové číslo je tak stejné. Tím by měla mít v principu i stejný poloměr. Rozdíl vazebné energie je dán pouze rozdílem energií elektrostatické vazby a ta závisí na poloměru. Pokud tak změříme hmotnosti zrcadlových jader, můžeme z rozdílu jejich hmotnosti určit rozdíl vazebné energie a z toho poloměr těchto jader. Odvoďte potřebný vztah a určete poloměry těchto dvou dvojic zrcadlových jader: 1) ^{59}Zn ($A = 59, Z = 30, N = 29, A_r = 58,949\,312$) a ^{59}Cu ($A = 59, Z = 29, N = 30, A_r = 58,939\,497$) a 2) ^{69}Br ($A = 69, Z = 35, N = 34, A_r = 68,950\,340$) a ^{69}Se ($A = 69, Z = 34, N = 35, A_r = 68,939\,413$). Srovnajte s poloměrem určeným z lineární aproximace závislosti objemu na počtu nukleonů a hodnoty $R_0 = 1,3 \text{ fm}$. Určete energii silné jaderné vazby na jeden nukleon u těchto dvojic jader. [1) $R = 5,14 \text{ fm}$, $R_{LA} = 5,06 \text{ fm}$, $\varepsilon_S = 11,08 \text{ MeV}$ 2) $R = 5,44 \text{ fm}$, $R_{LA} = 5,33 \text{ fm}$, $\varepsilon_S = 11,22 \text{ MeV}$]

Příklad 27: Na jakou energii je potřeba urychlit proton, aby se při srážce s protonem v pevném terči vyprodukoval pár proton a antiproton? Nukleony v jádře mají kinetickou energii a pohybují se. Tento pohyb nukleonů v jádře se označuje jako Fermiho pohyb. Může se tak stát, že některý z nich se pohybuje vstříc urychlenému protonu a tím dojde ke snížení potřebné prahové energie tvorby páru protonu a antiprotonu. Jaký bude práh, jestliže kinetická energie protonu v jádře ze zmíněného Fermiho pohybu je 25 MeV (jde zhruba o střední hodnotu)? [$E_k = 5\,628 \text{ MeV}$ (6 klidových hmotností protonů), $4\,292 \text{ MeV}$ (4,58 klidových hmotností protonů)]

Příklad 28: Předpokládejme, že byl vybudován superprotonový synchrotron SPS poskytující svazek protonů o energii 1 TeV . Nyní je zapotřebí řešit jeho využití. Jsou následující čtyři možnosti: a) svazek dopadá na nepohyblivý protonový terč; b) svazek se vstříčně sráží s druhým protonovým svazkem téže energie; c) svazek se vstříčně sráží s antiprotonovým svazkem téže energie vytvořeným jiným zdrojem (pokud se setkají

proton a antiproton s vysokou vzájemnou rychlostí nedochází k anihilaci, kvantová fyzika dovoluje v tomto případě každou reakci, která neporušuje zákony zachování, anihilace dominantně nastává pro setkání protonu a antiprotonu s nízkou vzájemnou rychlostí a na rozdíl od anihilace elektronu a pozitronu při ní nevznikají fotony ale několik mezonů); d) svazek se vstříčně sráží s elektronovým svazkem o energii 50 GeV a studují se elektron-protonové srážky, v letech 1992-2007 takto pracoval komplex urychlovačů HERA (Hadron-Electron Ring Accelerator) v DESY v Hamburku. Jakou maximální efektivní energii dostupnou v těžišťové E_{EDT} lze využít pro tvorbu nových částic anebo ke studiu jaderné struktury v každém z těchto případů? Poznámka: těžišťová soustava je souřadná soustava, ve které je rychlost těžiště dvou srážejících se částic rovna nule.

[a) $E_{EDT} \approx \sqrt{2E_{kp} \cdot E_{0p}} \approx 45 \text{ GeV}$; b) a c) $E_{EDT} = 2 \text{ TeV}$; d) $E_{EDT} \approx \sqrt{4E_{kp} \cdot E_{ke}} \approx 450 \text{ GeV}$, kde E_{kp} , E_{ke} jsou kinetické energie protonu a elektronu a E_{0p} je klidová energie protonu.]

Příklad 29: Vypočítejte, jak velkou kinetickou energii E_k by musel mít proton, srážející se s protonem, který byl v klidu, aby efektivní energie dostupná v těžišti byla $E_{EDT} = 14 \text{ TeV} = 14\,000 \text{ GeV}$? Ta je u srážek vstříčných svazků na urychlovači LHC. Vypočítejte, na jak velkou kinetickou energii by se urychlil proton v urychlovači, jehož prstencový magnet by byl položen po obvodu zemského rovníku (rovníkový poloměr zeměkoule $R_Z = 6\,378 \text{ km}$). Zřejmě toto by byl největší prstencový magnet a tedy i urychlovač, postavený na Zeměkouli. Větší by se musel stavět ve vesmíru. Předpokládejte dále, že magnetická indukce supravodivých magnetů by byla stejná jako u magnetů LHC, tj. $B = 8,33 \text{ T}$. Vypočítejte, jak velký poloměr by musel mít prstencový magnet urychlovače se stejnou magnetickou indukcí, aby urychlil protony na energii požadovanou v první části této úlohy. [$E_{k1} = 104,5 \text{ PeV}$, $E_{k2} = 15,9 \text{ PeV}$, $R = 41\,810 \text{ km}$].

Příklad 30: Jádro livermoría ^{291}Lv se může rozpadat velmi dlouho kaskádou rozpadů alfa až na jádro ruthefordia ^{267}Rf , které se rozpadá pouze samovolným štěpením. V řadě rozpadů jsou však dvě místa, kde se jádro může rozpadnout buď štěpením, nebo rozpadem alfa. Jde o darmstadtium ^{279}Ds (85 % štěpení) a seaborgium ^{271}Sg (30 % štěpení). Jaká je pravděpodobnost, že řada rozpadů skončí až u ruthefordia? Jaká je pravděpodobnost, že při produkci 40 jader ^{291}Lv budeme pozorovat 8 případů rozpadu alfa ^{279}Ds a 5 případů rozpadu alfa ^{271}Sg ? [$p = 10,5\%$, $p = 2,8\%$]

Příklad 31: Pro průzkum vzdálených oblastí Sluneční soustavy jsou nutné jaderné zdroje. Používají se radionuklidové zdroje, které pracují na základě energie

produkované v rozpadu radionuklidu. Až doposud se pro jejich výrobu využíval izotop plutonia ^{238}Pu ($A_r = 238,049\ 558$), který se s poločasem rozpadu 87,7 let přeměňuje rozpadem alfa na radionuklid s $A_r = 234,040\ 950$. Napište, jaký radionuklid v rozpadu vzniká. Izotop ^{238}Pu se ovšem vyrábí ozařováním izotopu neptunia ^{237}Np ve speciálních reaktorech. Ty byly v USA uzavřeny v osmdesátých a devadesátých letech. V současné době tak možnost vyrábět tento radionuklid ve větším množství chybí. To je důvod, proč nejen Evropská vesmírná agentura ESA uvažuje o využívání radionuklidových zdrojů založených na izotopu americia ^{241}Am ($A_r = 241,056\ 827$). Ten se vyskytuje ve vyhořelém palivu z jaderných elektráren. Přeměňuje se rozpadem alfa s poločasem rozpadu 432,2 let na radionuklid s $A_r = 237,048\ 171$. O jaké jádro se jedná? Určete, jaké množství ^{241}Am a ^{238}Pu potřebuje radionuklidový zdroj připravovaný pro sondu určenou ke studiu těles v Kuiperově pásu za dráhou Pluta. Sonda letí do pásu řadu let a její mise je tak hodně dlouhodobá. Zdroj musí mít i po třiceti letech práce elektrický výkon 500 W. Určete množství pro varianty využití konverze tepelné energie na elektrickou pomocí termočlánek (účinnost 7 %) a Stirlingova motoru (účinnost 30 %). Jaká je aktivita těchto zdrojů na počátku jejich mise a po zmíněných 30 letech? [Pro termočlánek: $M(^{238}\text{Pu}) = 15,9\ \text{kg}$ a $M(^{241}\text{Am}) = 65,3\ \text{kg}$, pro Stirlingův motor: $M(^{238}\text{Pu}) = 3,7\ \text{kg}$ a $M(^{241}\text{Am}) = 15,2\ \text{kg}$]

Příklad 32: Jakou energii budou mít rentgenovská kvanta vyzařovaná atomem oganessonem při přechodu elektronu z prvního a druhého vybuzeného stavu do stavu základního? Určete pomocí přiblížení Bohrova modelu atomu. [Celková energie daná součtem elektrické potenciální a kinetické energie elektronu je $E_n = E_0 \left(\sqrt{1 - \left(\alpha \frac{Z}{n} \right)^2} - 1 \right)$, kde E_0 je klidová energie elektronu, $E_2 - E_1 = 201,4\ \text{keV}$, $E_3 - E_1 = 229,7\ \text{keV}$]

4 Literatura

- [1] Fljorov, G. N., Iljinov, A. S. (přeložil Málek J.): *Na cestě k novým prvkům*, Nakladatelství Mir, Moskva, 1987
- [2] PDG: The review of particle physics (2017), <http://pdg.lbl.gov/>
- [3] Šedivý, P.: *Kapitoly ze speciální teorie relativity*, (studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku)
- [4] AMDC – Atomic Mass Data Center (IAEA), <https://www-nds.iaea.org/amdc/>
- [5] Vybíral B.: *Elektrostatika*, (studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku)
- [6] Jírů, J.: *Diferenciální počet ve fyzice* (studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku)
- [7] Jarešová, M., Volf, I.: *Diferenciální počet ve fyzice* (studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku)
- [8] Jarešová, M., Volf, I.: *Integrální počet ve fyzice*, Knihovnička FO č. 73, MAFY Hradec Králové 2006.
- [9] Jarešová, M., Volf, I.: *Fyzika je kolem nás (molekulová fyzika a termika)*, (studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku)
- [10] Kapoun, M.: *Atomy* (studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku)